

**Писмени испит из дистрибуција и парцијалних једначина А (М смер) и
једначина математичке физике (Н/П смер)**

Јануар 1, 18.2.2026.

1. Решити проблем

$$\begin{aligned}u &\in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty)), \\u_{tt} + 3u_{xt} + 2u_{xx} &= 1, \\u(x, 0) &= \cos x, \quad u_t(x, 0) = 0.\end{aligned}$$

2. Наћи хармонијску функцију $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ која задовољава наведена својства или показати да не постоји:

- (а) $u(x, y) = 1$ за $x^2 + y^2 = 1$, $u(x, y) = 2$ за $x^2 + y^2 = 2$.
(б) $u(x, y) = 1$ за $x^2 + y^2 = 1$, $u(x, y) = 2$ за $x^2 + y^2 = 2$ и $u(x, y) \rightarrow +\infty$ кад $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

3. Решити мешовити проблем за топлотну једначину:

$$\begin{aligned}u &: [0, \pi] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \\u &\in C^{2,1}((0, \pi) \times (0, \infty)) \cap C([0, \pi] \times [0, \infty)), \\u_t &= u_{xx} + e^{-4t} \sin 2x, \\u(x, 0) &= \sin x + \cos x, \\u(0, t) &= e^{-t}, \quad u(\pi, t) = -e^{-t}.\end{aligned}$$

**Писмени испит из дистрибуција и парцијалних једначина А (М смер) и
једначина математичке физике (Н/П смер)**

Јануар 2, 7.3.2026.

1. Нека су $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ две хармонијске функције такве да је $\nabla u \cdot \nabla v = 0$. Ако је $u = \operatorname{Re} f$ за неку холоморфну функцију f , доказати да је $v = a \operatorname{Im} f + b$ за неке константе $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Нека је $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Решити следећи проблем (одредити решење и доказати да је јединствено):

$$\begin{aligned}u &: P \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \in C^2(\operatorname{int} P) \cap C(P), \\ \Delta u &= 0, \\u(x, y) &= x + y^2 \quad \text{за } x^2 + y^2 = 1, \\u(x, y) &= x^2 y + \ln 2 \quad \text{за } x^2 + y^2 = 4.\end{aligned}$$

3. Решити следећи мешовити проблем за таласну једначину (одредити решење и доказати да је јединствено):

$$\begin{aligned}u &: [0, \pi] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \\u &\in C^2((0, \pi) \times (0, +\infty)) \cap C([0, \pi] \times [0, +\infty)), \\u_{tt} &= u_{xx} + \sin(2x), \\u(x, 0) &= x(\pi - x) \cos x, \\u_t(x, 0) &= \sin^3 x, \\u(0, t) &= 0, \quad u(\pi, t) = 0.\end{aligned}$$

Писмени испит из дистрибуција и парцијалних једначина А (М смер) и једначина математичке физике (Н/П смер)

Јун 1, 29.6.2026.

1. Решити проблем

$$\begin{aligned}u &\in C^2(\mathbb{R} \times [0, +\infty)), \\2u_{xx} + 5u_{xt} + 3u_{tt} &= t, \\u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) &= x.\end{aligned}$$

Упутство: Раставити проблем на две транспортне једначине.

2. Нека је $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Решити следећи проблем (одредити решење и доказати да је јединствено):

$$\begin{aligned}u : P &\rightarrow \mathbb{R}, \quad u \in C^2(\text{int}P) \cap C(P), \\ \Delta u &= 6y, \\ u(x, y) &= 1 - 2xy - 2y^2 + y^3 \text{ за } x^2 + y^2 = 1, \\ u(x, y) &= \ln 4 + 4 - \frac{xy}{8} - 2y^2 + y^3 \text{ за } x^2 + y^2 = 4.\end{aligned}$$

3. Решити следећи мешовити проблем за таласну једначину (одредити решење и доказати да је јединствено):

$$\begin{aligned}u &: [0, \pi] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \\ u &\in C^2((0, \pi) \times (0, +\infty)) \cap C([0, \pi] \times [0, +\infty)), \\ u_{tt} &= u_{xx} + t \sin(x), \\ u(x, 0) &= \sin^3 x, \\ u_t(x, 0) &= x(\pi - x), \\ u(0, t) &= 0, \quad u(\pi, t) = 0.\end{aligned}$$

Писмени испит из дистрибуција и парцијалних једначина А (М смер) и једначина математичке физике (Н/П смер)

Јун 2, 16.7.2026.

1. За $c > 0$ наћи све хармонијске функције $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такве да је

$$|u(x, y)| \leq |y^2 - x^3 + cx|.$$

2. Решити следећи мешовити проблем за топлотну једначину (одредити решење и доказати да је јединствено):

$$\begin{aligned}u &: [0, \pi] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \\ u &\in C^{2,1}((0, \pi) \times (0, +\infty)) \cap C([0, \pi] \times [0, +\infty)), \\ u_t &= u_{xx} + e^{-4t} \sin(2x), \\ u(x, 0) &= \sin x + \cos(2x), \\ u(0, t) &= e^{-4t}, \quad u(\pi, t) = e^{-4t}.\end{aligned}$$

3. Решити следећи мешовити проблем за таласну једначину (одредити решење и доказати да је јединствено):

$$\begin{aligned}u &: [0, \pi] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \\ u &\in C^2((0, \pi) \times (0, +\infty)) \cap C([0, \pi] \times [0, +\infty)), \\ u_{tt} &= u_{xx} + t \sin(x), \\ u(x, 0) &= \sin^3 x, \\ u_t(x, 0) &= x(\pi - x), \\ u(0, t) &= 0, \quad u(\pi, t) = 0.\end{aligned}$$

**Писмени испит из дистрибуција и парцијалних једначина А (М смер) и
једначина математичке физике (Н/П смер)**

Септембар 1, 29.8.2026.

1. Нека су $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ две хармонијске функције такве да је $\nabla u \cdot \nabla v = 0$. Ако је $u = \operatorname{Re} f$ за неку неконстантну холоморфну функцију f , доказати да је $v = a \operatorname{Im} f + b$ за неке константе $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Решити следећи мешовити проблем за таласну једначину (одредити решење и доказати да је јединствено):

$$\begin{aligned} u &: [0, \pi] \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \\ u &\in C^2((0, \pi) \times (0, +\infty)) \cap C([0, \pi] \times [0, +\infty)), \\ u_{tt} &= u_{xx} + t \cos x + \sin^3 x, \\ u(x, 0) &= \sin(2x), \\ u_t(x, 0) &= \cos x, \\ u(0, t) &= t, \quad u(\pi, t) = -t. \end{aligned}$$

3. Одредити тип, свести на канонски облик, и одредити опште решење једначине:

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} + 10(x + y) = 0.$$

**Писмени испит из дистрибуција и парцијалних једначина А (М смер) и
једначина математичке физике (Н/П смер)**

Септембар 2, 16.9.2026.

1. Нека је $P = [0, \pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^2$. Решити следећи проблем (одредити решење и доказати да је јединствено):

$$\begin{aligned} u &: P \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \in C^2(\operatorname{int} P) \cap C(P), \\ \Delta u &= 0, \\ u(x, 0) &= u(x, \pi) = 0, \\ u(0, y) &= \sin y, \quad u(\pi, y) = \sin(2y). \end{aligned}$$

2. Решити мешовити проблем за топлотну једначину (одредити решење и доказати да је јединствено):

$$\begin{aligned} u &: [0, \pi] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \\ u &\in C^{2,1}((0, \pi) \times (0, \infty)) \cap C([0, \pi] \times [0, \infty)), \\ u_t &= u_{xx} + \frac{2}{\pi} \cos t \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sin^3 x, \\ u(x, 0) &= \sin x, \\ u(0, t) &= \sin t, \quad u(\pi, t) = -\sin t. \end{aligned}$$

3. Одредити тип, свести на канонски облик, и одредити опште решење једначине:

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} + xy = 0.$$