

Писмени испит из диференцијалних једначина са применама (Р смер)

Јануар 1, 18.2.2026.

1. Дата је диференцијална једначина

$$\dot{x} = t^2 x - t^2 x^2 - t^5 x^2.$$

- (а) Наћи опште решење ове једначине.
(б) Наћи партикуларно решење са почетним условом $x(1) = 1/2$.
(в) Показати да партикуларно решење из дела (б) има максимум у тачки $(t = 1, x = 1/2)$.

2. Дат је систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + y \\ \dot{y} &= y^2 - 1.\end{aligned}\tag{★}$$

- (а) Наћи еквилибријуме система (★) и одредити линеаризације у тим еквилибријумима.
(б) Решити линеарне системе добијене у делу под (а), и скицирати њихове фазне портрете.
(в) Ако је $(x(t), y(t))$ решење система (★) са почетним условом $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, показати да важи:

$$y_0 = \pm 1 \implies y(t) = \pm 1 \text{ и } y_0 \in (-1, 1) \implies y(t) \in (-1, 1).$$

- (г) (бонус) Скицирати фазни портрет система (★) коришћењем Хартман-Гробманове теореме.

3. Решити диференцијалну једначину

$$x^{(4)} - x = \sin t.$$

Писмени испит из диференцијалних једначина са применама (Р смер)

Јануар 2, 7.3.2026.

1. Дата је диференцијална једначина

$$t\dot{x} = te^{\frac{x}{t}} + x, \quad t \neq 0.\tag{⋈}$$

- (а) Решити једначину (⋈).
(б) Показати да за свако решење $x(t)$ једначине (⋈) важи $x(t) \rightarrow 0$ кад $t \rightarrow 0$.
(в) Показати да свако решење једначине (⋈) има вертикалну асимптоту.
(г) Скицирати поље праваца и интегралне криве једначине (⋈). *Помоћ:* Функција $f(y) = e^y + y$ је монотono растућа са једином нулом $y_0 \approx -0.57$.

2. Дата је матрица

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

- (а) Решити систем $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Показати да за сва решења овог система сем $\mathbf{x}(t) = 0$ важи $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathbf{x}(t)\| = \infty$.
(б) Показати да су сва решења система $\dot{\mathbf{x}} = \cos t A \mathbf{x}$ ограничена, тј. да важи $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mathbf{x}(t)\| < \infty$.

3. Наћи опште решење парцијалне једначине

$$(xu + xz)u_x + (yu + yz)u_y - (zx + zy)u_z = -(ux + uy).$$

Писмени испит из диференцијалних једначина са применама (Р смер)

Јун 1, 29.6.2026.

1. Дате су Рикатијеве диференцијалне једначине

$$x' = x^2 + 2x + 1, \quad x' = t^2 x^2 + \frac{2}{t^4}. \quad (\triangle)$$

Решити диференцијалне једначине $(\triangle)$.

2. (а) Доказати да се произвољна Рикатијева диференцијална једначина $x' = p(t)x^2 + q(t)x + r(t)$ сменом

$$x(t) = -\frac{1}{p(t)} \cdot \frac{u'(t)}{u(t)},$$

где је $u(t)$ нова непозната функција, може свести на линеарну хомогену диференцијалну једначину другог реда.

- (б) Применити део (а) на диференцијалне једначине $(\triangle)$, па их на тај начин решити (решавајући једначине другог реда).

3. Скицирати фазне портрете следећих система диференцијалних једначина:

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 + 6x_2 \\ x_2' &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + 6x_2 \\ x_2' &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1' &= 2|x_1| + 6x_2 \\ x_2' &= x_1 + 3x_2 \end{aligned}$$

Писмени испит из диференцијалних једначина са применама (Р смер)

Јун 2, 16.7.2026.

1. Дата је диференцијална једначина

$$\dot{x} = -xt + t - x. \quad (\diamond)$$

(а) Решити једначину $(\diamond)$. Примитивну функцију од функције $s \mapsto e^{\frac{s^2}{2} + s}$ сматрати познатом.

(б) Показати да су сва решења једначине $(\diamond)$ дефинисана за све $t \in \mathbb{R}$.

(в) Ако је $x(t)$ решење једначине $(\diamond)$, показати да је $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x(t) = 1$.

(г) Скицирати поље праваца и интегралне криве једначине $(\diamond)$.

2. Решити једначину

$$x^{(5)} + x^{(4)} + x^{(3)} + x'' + x' + x = e^{-t}.$$

3. (а) Решити систем једначина

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

(б) Решити парцијалну једначину

$$(y + u)u_x + (x + u)u_y = -2x - 2y + u, \quad u(1, s) = s^2$$

методом карактеристика.

Писмени испит из диференцијалних једначина са применама (Р смер)

Септембар 1, 29.8.2026.

1. Дата је једначина

$$t\dot{x} = t \tan \frac{x}{t} + x, \quad t \neq 0, \quad \frac{x}{t} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (\circ)$$

(а) Решити једначину (о).

(б) Наћи сва решења једначине (о) чији су графици делови правих.

(в) Скицирати поље праваца и интегралне криве једначине (о).

2. Дат је систем

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & -8 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

(а) Решити систем и одредити ток φ_t који он генерише.

(б) Наћи раван Π за коју важи $\mathbf{x}_0 \in \Pi \Rightarrow (\forall t \in \mathbb{R}) \mathbf{x}(t) \in \Pi$.

(в) Ако је B лопта полупречника 1 са центром у координатном почетку, одредити $Vol(\varphi_t(B))$.

(г) Ако је C круг полупречника 1 са центром у координатном почетку, који припада равни Π , одредити површину $\varphi_t(C)$.

3. Решити једначину

$$x^{(4)} + 2x''' + x'' - 8x' - 20x = e^{-t} \cos(2t).$$

Писмени испит из диференцијалних једначина са применама (Р смер)

Септембар 2, 16.9.2026.

1. Дата је једначина

$$2x\dot{x} = x^2 + t^2 - 1. \quad (\star)$$

(а) Решити једначину (★).

(б) Скицирати поље праваца и интегралне криве једначине $\dot{x} = x + t^2 - 1$, и потом једначине (★).

2. Дати су системи

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{y}} = (5y_1^2 + 5y_2^2 + 6y_1y_2) \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{5}{4} \\ -\frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \mathbf{y}.$$

(а) Одредити решење $(x_1(t), x_2(t))$ прве једначине које задовољава почетне услове $(x_1(0), x_2(0)) = (x_{10}, x_{20})$.

(б) Одредити решење $(y_1(t), y_2(t))$ друге једначине које задовољава почетне услове $(y_1(0), y_2(0)) = (x_{10}, x_{20})$.

Помоћ: Потражити решење у облику $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(h(t))$, за неку функцију h , $h(0) = 0$, где је $\mathbf{x}(t)$ решење из дела (а).

3. Наћи опште решење парцијалне једначине

$$uxu_x + 2uyu_y = x^2 + 4y^2.$$