Писмени испит из диференцијалних једначина са применама (Р смер)

Септембар 2, 21.10.2025.

1. Нека је $D = \{(t, x) \mid t > 0,\, x > 0\}$.

(а) Нека су $f, g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ глатке функције такве да је $f(u) < g(u)$, за свако $u \in [0, +\infty)$. Доказати да диференцијална једначина $f(tx)x + g(tx)tx' = 0$ на D допушта интеграциони фактор $\mu(t, x) = \frac{1}{tx(f(tx)-g(tx))}$.

(б) Решити диференцијалну једначину $2tx^2 + (t^3x^2 + t)x' = 0$ на области D.

2. Посматрајмо систем диференцијалних једначина $X' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & \sigma \end{bmatrix} X$, где је $\sigma \in \mathbb{R}$ параметар.

(а) За које вредности параметра σ овај систем има бар једно неконстантно периодично решење?

(б) За све вредности параметра σ пронађене у делу под **(а)** скицирати фазни портрет датог система.

(в) За које вредности параметра σ је фазни портрет датог система седло?

3. Решити диференцијалну једначину

$$x^{(4)} - 2x''' + x'' - 2x' = e^{2t} + 2t,$$

и наћи једно партикуларно решење x_p које задовољава услов $x_p(1) = \pi$.

Писмени испит из диференцијалних једначина са применама (Р смер)

Септембар 2, 21.10.2025.

1. Нека је $D = \{(t, x) \mid t > 0,\, x > 0\}$.

(а) Нека су $f, g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ глатке функције такве да је $f(u) < g(u)$, за свако $u \in [0, +\infty)$. Доказати да диференцијална једначина $f(tx)x + g(tx)tx' = 0$ на D допушта интеграциони фактор $\mu(t, x) = \frac{1}{tx(f(tx)-g(tx))}$.

(б) Решити диференцијалну једначину $2tx^2 + (t^3x^2 + t)x' = 0$ на области D.

2. Посматрајмо систем диференцијалних једначина $X' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & \sigma \end{bmatrix} X$, где је $\sigma \in \mathbb{R}$ параметар.

(а) За које вредности параметра σ овај систем има бар једно неконстантно периодично решење?

(б) За све вредности параметра σ пронађене у делу под **(а)** скицирати фазни портрет датог система.

(в) За које вредности параметра σ је фазни портрет датог система седло?

3. Решити диференцијалну једначину

$$x^{(4)} - 2x''' + x'' - 2x' = e^{2t} + 2t,$$

и наћи једно партикуларно решење x_p које задовољава услов $x_p(1) = \pi$.

Писмени испит из диференцијалних једначина са применама (Р смер)

Септембар 2, 21.10.2025.

1. Нека је $D = \{(t, x) \mid t > 0,\, x > 0\}$.

(а) Нека су $f, g\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ глатке функције такве да је $f(u) < g(u)$, за свако $u \in [0, +\infty)$. Доказати да диференцијална једначина $f(tx)x + g(tx)tx' = 0$ на D допушта интеграциони фактор $\mu(t, x) = \frac{1}{tx(f(tx)-g(tx))}$.

(б) Решити диференцијалну једначину $2tx^2 + (t^3x^2 + t)x' = 0$ на области D.

2. Посматрајмо систем диференцијалних једначина $X' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & \sigma \end{bmatrix} X$, где је $\sigma \in \mathbb{R}$ параметар.

(а) За које вредности параметра σ овај систем има бар једно неконстантно периодично решење?

(б) За све вредности параметра σ пронађене у делу под **(а)** скицирати фазни портрет датог система.

(в) За које вредности параметра σ је фазни портрет датог система седло?

3. Решити диференцијалну једначину

$$x^{(4)} - 2x''' + x'' - 2x' = e^{2t} + 2t,$$

и наћи једно партикуларно решење x_p које задовољава услов $x_p(1) = \pi$.