Писмени испит из Диференцијалних једначина (Р), 31.05.2024.

1. Дата је диференцијална једначина $(6tx + 2x^2) + (4t^2 + 3tx)\dot{x} = 0$.

   (а) Доказати да дата диференцијална једначина није у тоталном диференцијалу, али да постоји функција $t \mapsto \phi(t)$ таква да диференцијална једначина $x\phi(t)(6tx + 2x^2) + x\phi(t)(4t^2 + 3tx)\dot{x} = 0$ јесте у тоталном диференцијалу.

   (б) На основу претходног дела, решити дату диференцијалну једначину.

2. У зависности од реалних параметара a и b одредити опште решење диференцијалне једначине

$$x^{(2024)} + \binom{2024}{1} a x^{(2023)} + \ldots + \binom{2024}{k} a^k x^{(2024-k)} + \ldots + \binom{2024}{2023} a^{2023}\dot{x} + a^{2024}x = e^{bt}.$$

3. Нека је $2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ скуп целих парних бројева и $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{dist}(x, 2\mathbb{Z})$, где је dist функција растојања. Дата је диференцијална једначина $\dot{x} = f(x)$.

   (а) Доказати да Кошијев проблем $\dot{x} = f(x)$, $x(t_0) = x_0$ има локално јединствено решење, за свако $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$.

   (б) Скицирати поље праваца и интегралне криве дате диференцијалне једначине.

   (в) Нека је $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ глатко векторско поље које није нула ни у једној тачки. Доказати да диференцијална једначина $\dot{x} = g(x)$ не може имати периодична решења.

Писмени испит из Диференцијалних једначина (Р), 31.05.2024.

1. Дата је диференцијална једначина $(6tx + 2x^2) + (4t^2 + 3tx)\dot{x} = 0$.

   (а) Доказати да дата диференцијална једначина није у тоталном диференцијалу, али да постоји функција $t \mapsto \phi(t)$ таква да диференцијална једначина $x\phi(t)(6tx + 2x^2) + x\phi(t)(4t^2 + 3tx)\dot{x} = 0$ јесте у тоталном диференцијалу.

   (б) На основу претходног дела, решити дату диференцијалну једначину.

2. У зависности од реалних параметара a и b одредити опште решење диференцијалне једначине

$$x^{(2024)} + \binom{2024}{1} a x^{(2023)} + \ldots + \binom{2024}{k} a^k x^{(2024-k)} + \ldots + \binom{2024}{2023} a^{2023}\dot{x} + a^{2024}x = e^{bt}.$$

3. Нека је $2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ скуп целих парних бројева и $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{dist}(x, 2\mathbb{Z})$, где је dist функција растојања. Дата је диференцијална једначина $\dot{x} = f(x)$.

   (а) Доказати да Кошијев проблем $\dot{x} = f(x)$, $x(t_0) = x_0$ има локално јединствено решење, за свако $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$.

   (б) Скицирати поље праваца и интегралне криве дате диференцијалне једначине.

   (в) Нека је $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ глатко векторско поље које није нула ни у једној тачки. Доказати да диференцијална једначина $\dot{x} = g(x)$ не може имати периодична решења.

Писмени испит из Диференцијалних једначина (Р), 31.05.2024.

1. Дата је диференцијална једначина $(6tx + 2x^2) + (4t^2 + 3tx)\dot{x} = 0$.

   (а) Доказати да дата диференцијална једначина није у тоталном диференцијалу, али да постоји функција $t \mapsto \phi(t)$ таква да диференцијална једначина $x\phi(t)(6tx + 2x^2) + x\phi(t)(4t^2 + 3tx)\dot{x} = 0$ јесте у тоталном диференцијалу.

   (б) На основу претходног дела, решити дату диференцијалну једначину.

2. У зависности од реалних параметара a и b одредити опште решење диференцијалне једначине

$$x^{(2024)} + \binom{2024}{1} a x^{(2023)} + \ldots + \binom{2024}{k} a^k x^{(2024-k)} + \ldots + \binom{2024}{2023} a^{2023}\dot{x} + a^{2024}x = e^{bt}.$$

3. Нека је $2\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$ скуп целих парних бројева и $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{dist}(x, 2\mathbb{Z})$, где је dist функција растојања. Дата је диференцијална једначина $\dot{x} = f(x)$.

   (а) Доказати да Кошијев проблем $\dot{x} = f(x)$, $x(t_0) = x_0$ има локално јединствено решење, за свако $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$.

   (б) Скицирати поље праваца и интегралне криве дате диференцијалне једначине.

   (в) Нека је $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ глатко векторско поље које није нула ни у једној тачки. Доказати да диференцијална једначина $\dot{x} = g(x)$ не може имати периодична решења.