Писмени испит из диференцијалних једначина (Р смер)

10.1.2024.

1. Дата је диференцијална једначина

$$\dot{x} = \frac{x}{t}\frac{\ln^2 t - \ln^2 x}{2\ln x}, \quad x > 0, x \neq 1, t > 0.$$

а) Решити ову једначину.
б) Постоје ли решења једначине која задовољавају $x(1) = 2$, или $x(1) = 1/2$?

2. Дат је систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x^2 \\ \dot{y} &= x - y^2. \end{aligned} \tag{$\star$}$$

а) Наћи еквилибријуме система ($\star$) и линеаризовати га у тим тачкама.

б) Решити добијене линеарне системе.

в) Скицирати фазне портрете система добијених линеаризацијом.

г) Постоји ли трајекторија система ($\star$) која лежи на правој, тј. фазна крива која је права?

д) Доказати да ако је $\begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$ решење система ($\star$), онда је и $\begin{bmatrix} g(-t) \\ f(-t) \end{bmatrix}$ такође решење, тј. фазне криве су симетричне у односу на праву $y = x$.

3. Наћи опште решење парцијалне једначине

$$x^2 z^2 u_x - 2xyz^2 u_y - 2xz^3 u_z = 0.$$

Писмени испит из диференцијалних једначина (Р смер)

10.1.2024.

1. Дата је диференцијална једначина

$$\dot{x} = \frac{x}{t}\frac{\ln^2 t - \ln^2 x}{2\ln x}, \quad x > 0, x \neq 1, t > 0.$$

а) Решити ову једначину.
б) Постоје ли решења једначине која задовољавају $x(1) = 2$, или $x(1) = 1/2$?

2. Дат је систем диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x^2 \\ \dot{y} &= x - y^2. \end{aligned} \tag{$\star$}$$

а) Наћи еквилибријуме система ($\star$) и линеаризовати га у тим тачкама.

б) Решити добијене линеарне системе.

в) Скицирати фазне портрете система добијених линеаризацијом.

г) Постоји ли трајекторија система ($\star$) која лежи на правој, тј. фазна крива која је права?

д) Доказати да ако је $\begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \end{bmatrix}$ решење система ($\star$), онда је и $\begin{bmatrix} g(-t) \\ f(-t) \end{bmatrix}$ такође решење, тј. фазне криве су симетричне у односу на праву $y = x$.

3. Наћи опште решење парцијалне једначине

$$x^2 z^2 u_x - 2xyz^2 u_y - 2xz^3 u_z = 0.$$