Писмени испит из диференцијалних једначина са применама (Р смер)

Јануар 1, 23.8.2025.

1. Нека је дата диференцијална једначина облика

$$\dot{x} = tf\left(\frac{x}{t^2}\right), \quad x, t > 0, \tag{$\star$}$$

где је f глатка функција.

(а) Свести једначину ($\star$) на облик који раздваја промењиве сменом $y(t) = \dfrac{x(t)}{t^2}$.

(б) Решити једначину $\dot{x} = 4\dfrac{x^2}{t^3} + 2\dfrac{x}{t} + \dfrac{1}{4}t$.

(в) Ако је $x(t)$ решење једначине ($\star$), доказати да је и $y(t) = \dfrac{1}{a^2}x(at)$, $a > 0$ такође њено решење.

2. Посматрајмо диференцијалну једначину $x' = (x-1)(x^2+1)(x+1)$.

(а) Не решавајући дату диференцијалну једначину скицирати јој поље праваца и интегралне криве.

(б) Доказати да постоји $\xi \in (0,1)$ тако да важи $u(2025) = e^{-1}$, где је u решење дате једначине са почетним условом $u(0) = \xi$. Можете се послужити сликом коју сте добили у делу под (a).

3. Дата је матрица

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$$

и једначине

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{x}} = tA\mathbf{x}. \tag{$\diamondsuit$}$$

(а) Решити једначине ($\diamondsuit$).

(б) Показати да за сва решења $x_1(t)$ прве једначине из ($\diamondsuit$) важи $\lim_{t\to\infty}|x_1(t)| = 0$ и $\lim_{t\to-\infty}|x_1(t)| = \infty$. Показати да за сва решења $x_2(t)$ друге једначине из ($\diamondsuit$) важи $\lim_{t\to\infty}|x_2(t)| = 0$ и $\lim_{t\to-\infty}|x_2(t)| = 0$.

Писмени испит из диференцијалних једначина са применама (Р смер)

Јануар 1, 23.8.2025.

1. Нека је дата диференцијална једначина облика

$$\dot{x} = tf\left(\frac{x}{t^2}\right), \quad x, t > 0, \tag{$\star$}$$

где је f глатка функција.

(а) Свести једначину ($\star$) на облик који раздваја промењиве сменом $y(t) = \dfrac{x(t)}{t^2}$.

(б) Решити једначину $\dot{x} = 4\dfrac{x^2}{t^3} + 2\dfrac{x}{t} + \dfrac{1}{4}t$.

(в) Ако је $x(t)$ решење једначине ($\star$), доказати да је и $y(t) = \dfrac{1}{a^2}x(at)$, $a > 0$ такође њено решење.

2. Посматрајмо диференцијалну једначину $x' = (x-1)(x^2+1)(x+1)$.

(а) Не решавајући дату диференцијалну једначину скицирати јој поље праваца и интегралне криве.

(б) Доказати да постоји $\xi \in (0,1)$ тако да важи $u(2025) = e^{-1}$, где је u решење дате једначине са почетним условом $u(0) = \xi$. Можете се послужити сликом коју сте добили у делу под (a).

3. Дата је матрица

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -7 \end{bmatrix}$$

и једначине

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \dot{\mathbf{x}} = tA\mathbf{x}. \tag{$\diamondsuit$}$$

(а) Решити једначине ($\diamondsuit$).

(б) Показати да за сва решења $x_1(t)$ прве једначине из ($\diamondsuit$) важи $\lim_{t\to\infty}|x_1(t)| = 0$ и $\lim_{t\to-\infty}|x_1(t)| = \infty$. Показати да за сва решења $x_2(t)$ друге једначине из ($\diamondsuit$) важи $\lim_{t\to\infty}|x_2(t)| = 0$ и $\lim_{t\to-\infty}|x_2(t)| = 0$.