Писмени испит из диференцијалних једначина са применама (Р смер)

Јануар 1, 16.8.2025.

1. Решити диференцијалну једначину $t(\ln t + 2x)x' - 7\ln t + x = 0$, уводећи смену $y(t) = x(e^t)$. Можете задатак урадити и на други начин.

2. За параметре $a, b \in \mathbb{R}$ нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \ \det A \neq 0.$$

   (а) Показати да су сопствене вредности матрице A реалне и да су им одговарајући сопствени вектори међусобно ортогонални.

   (б) Показати да на основу знака сопствених вредности постоје три различита типа фазног портрета система $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. У зависности од a и b, у ab равни означити области који одговарају сваком од три случаја.

   (в) Бирајући вредности за a и b, за сваки од три случаја из дела под (б) скицирати по један фазни портрет.

3. Дата је диференцијална једначина

$$x^{(4)} + 3x'' + 2x = f(t). \qquad (\clubsuit)$$

   (а) Решити једначину ($\clubsuit$) за $f(t) = 0$ и показати да су сва решења ограничена.

   (б) Ако је $f(t) = \cos(\omega t)$, наћи једну вредност ω такву да постоји неограничено решење једначине ($\clubsuit$) и решити је у том случају.

Писмени испит из диференцијалних једначина са применама (Р смер)

Јануар 1, 16.8.2025.

1. Решити диференцијалну једначину $t(\ln t + 2x)x' - 7\ln t + x = 0$, уводећи смену $y(t) = x(e^t)$. Можете задатак урадити и на други начин.

2. За параметре $a, b \in \mathbb{R}$ нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \ \det A \neq 0.$$

   (а) Показати да су сопствене вредности матрице A реалне и да су им одговарајући сопствени вектори међусобно ортогонални.

   (б) Показати да на основу знака сопствених вредности постоје три различита типа фазног портрета система $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. У зависности од a и b, у ab равни означити области који одговарају сваком од три случаја.

   (в) Бирајући вредности за a и b, за сваки од три случаја из дела под (б) скицирати по један фазни портрет.

3. Дата је диференцијална једначина

$$x^{(4)} + 3x'' + 2x = f(t). \qquad (\clubsuit)$$

   (а) Решити једначину ($\clubsuit$) за $f(t) = 0$ и показати да су сва решења ограничена.

   (б) Ако је $f(t) = \cos(\omega t)$, наћи једну вредност ω такву да постоји неограничено решење једначине ($\clubsuit$) и решити је у том случају.