Писмени испит из Диференцијалних једначина (Р), 30.01.2024.

1. Дата је диференцијална једначина $(t + t^2x + e^{x(1-t)})\,\mathrm{d}x + (x + tx^2 + e^{t(1-x)})\,\mathrm{d}t = 0$.

   (а) Помножити дату једначину функцијом облика $g(tx)$ тако да је њена лева страна тотални диференцијал $\mathrm{d}F(t,x)$ неке функције $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, а затим наћи опште решење те диференцијалне једначине.

   (б) Одредити решење са почетним условом $x(0) = 0$, а затим и једначину тангенте на график тог решења у тачки $(0,0)$.

2. (а) Нека је $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неконстантна функција класе C^1 и константе $b, c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Доказати да постоји интегрална крива диференцијалне једначине $x' = f(ax + bt + c)$ која је права ако и само ако постоји $z \in \mathbb{R}$ такво да је $f(z) = -\frac{b}{a}$.

   (б) За $\alpha \in \mathbb{R}$ посматрајмо диференцијалну једначину $x' = (2x + t - 1)^2 + \alpha$. $(\star)$

   (б1) За које вредности параметра α једначина $(\star)$ нема ниједну интегралну криву која је права?

   (б2) Без решавања, скицирати поље праваца и интегралне криве једначине $(\star)$ за $\alpha = -\frac{3}{2}$.

3. Дат је систем диференцијалних једначина

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

   (а) Решити овај систем коришћењем Жорданове нормалне форме.

   (б) На који начин ток генерисан овим системом мења запремину?

Писмени испит из Диференцијалних једначина (Р), 30.01.2024.

1. Дата је диференцијална једначина $(t + t^2x + e^{x(1-t)})\,\mathrm{d}x + (x + tx^2 + e^{t(1-x)})\,\mathrm{d}t = 0$.

   (а) Помножити дату једначину функцијом облика $g(tx)$ тако да је њена лева страна тотални диференцијал $\mathrm{d}F(t,x)$ неке функције $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, а затим наћи опште решење те диференцијалне једначине.

   (б) Одредити решење са почетним условом $x(0) = 0$, а затим и једначину тангенте на график тог решења у тачки $(0,0)$.

2. (а) Нека је $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неконстантна функција класе C^1 и константе $b, c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Доказати да постоји интегрална крива диференцијалне једначине $x' = f(ax + bt + c)$ која је права ако и само ако постоји $z \in \mathbb{R}$ такво да је $f(z) = -\frac{b}{a}$.

   (б) За $\alpha \in \mathbb{R}$ посматрајмо диференцијалну једначину $x' = (2x + t - 1)^2 + \alpha$. $(\star)$

   (б1) За које вредности параметра α једначина $(\star)$ нема ниједну интегралну криву која је права?

   (б2) Без решавања, скицирати поље праваца и интегралне криве једначине $(\star)$ за $\alpha = -\frac{3}{2}$.

3. Дат је систем диференцијалних једначина

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

   (а) Решити овај систем коришћењем Жорданове нормалне форме.

   (б) На који начин ток генерисан овим системом мења запремину?