Комутатор векторских поља

Прво, уведимо нови запис векторских поља који ће олакшати записивање неких ствари – ако је $F = (F_1, \dots, F_n)$ поље дефинисано на $U \subset \mathbb{R}^n$ и $f : U \to \mathbb{R}$ функција, онда имамо познати извод функције f у правцу поља F:

$$df(F) = F_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + F_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = Ff.$$

Мотивисани овим записом, просто ћемо писати

$$F = F_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + F_n \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Задатак 1. *Одредити ток генерисан пољем:*

а) $F = \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}$ *у* $\mathbb{R}^3$,

б) $F = \frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ *у* $\mathbb{R}^2$

в) $F = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{||x||}\frac{\partial}{\partial x_i}$ *у* $\mathbb{R}^n$.

Решење: а) Ово поље нам даје систем једначина

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= -y, \end{aligned}$$

који се лако решава: видимо да је $x = x_0 + t$, а $y = y_0 \cos t + z_0 \sin t$, $z = z_0 \cos t - y_0 \sin t$. (Ако нисте сигурни за y, z, можете да решите овај систем преко експонента матрице или на неки други начин.) Ток генерисан овим пољем је

$$\varphi^t(x, y, z) = (x + t, y \cos t + z \sin t, z \cos t - y \sin t).$$

Задатак 2. *Испитати да ли су следећи токови у* $\mathbb{R}^3$ *једнопараметарске фамилије дифеоморфизама, и ако јесу одредити поља која их генеришу:*

а) $\varphi^t(x) = t(1, 1, 1) + x$,

б) $\varphi^t(x) = (t + 1)x$,

в) $\varphi^t(x) = e^t x$.

Решење: а) Треба да проверимо услове $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}$ и $\varphi^0 = id$. Други услов је задовољен: $\varphi^0(x) = x$, а за први имамо:

$$\varphi^t \circ \varphi^s(x) = \varphi^t(s(1,1,1)+x) = t(1,1,1)+s(1,1,1)+x = (t+s)(1,1,1)+x = \varphi^{t+s}(x),$$

па ово јесте једнопараметарска фамилија. Поље које је генерише добијамо из

$$\frac{d}{dt}\varphi^t(x) = (1,1,1) = F(\varphi^t(x)),$$

па је тривијално $F(x) = (1,1,1)$.

Дефиниција 1. *Нека су дата два векторска поља $F = (F_1, \ldots, F_n)$ и $G = (G_1, \ldots, G_n)$. Тада дефинишемо комутатор*

$$[F, G] := \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial G_j}{\partial x_i} - G_i \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Приметимо да је $[F, G] = dG(F) - dF(G)$. Да би се лакше видело, расписаћемо

$$dF(G) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix}.$$

Са предавања знамо да два поља комутирају ($[F, G] = 0$) ако и само ако токови које они генеришу комутирају.

Следећи рачун даје везу између комутатора токова и комутатора поља:

Нека су F, G векторска поља на $U \subset \mathbb{R}^n$, и ϕ^t, ψ^s токови које они генеришу, тј. $\frac{d}{dt}\phi^t = F(\phi^t)$ и $\frac{d}{ds}\psi^s = G(\psi^s)$. Посматрајмо разлику $d(t,s) = \phi^t \circ \psi^s(x) - \psi^s \circ \phi^t(x)$ за фиксирано x и мале t, s. Ако се прво крећемо током ϕ па затим ψ, не мора бити исто као кретање током ψ па онда током ϕ – та два кретања се разликују за $d(t,s)$.

Развијмо функцију d у Тејлоров развој да бисмо показали везу са комутатором поља. Тривијално је $d(0,0) = 0$, а за прве изводе имамо

$$\frac{\partial}{\partial t} d(t,s) = (\frac{d}{dt}\phi^t)|_{\psi^s(x)} - \psi^s_*|_{\phi^t(x)} \frac{d}{dt}\phi^t(x) = F(\phi^t \circ \psi^s(x)) - \psi^s_*|_{\phi^t(x)} F(\phi^t(x)),$$

па кад ово применимо у тачки $(0,0)$, добијемо $\frac{\partial}{\partial t}\big|_0 d(t,s) = 0$, јер је ψ^s за $s = 0$ идентитет, па је ψ^s_* идентичка матрица у било којој тачки. Слично $\frac{\partial}{\partial s}\big|_0 d(t,s) = 0$. Ако израчунамо други извод по t:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} d(t,s) = dF|_{\phi^t \circ \psi^s(x)} F(\phi^t \circ \psi^s(x)) - \psi^s_*|_{\phi^t(x)} dF|_{\phi^t(x)} F(\phi^t(x)),$$

и израчунамо га у $(0,0)$, добијамо исто:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big|_0 d(t,s) = dF|_x F(x) - dF|_x F(x) = 0.$$

Аналогно, $\frac{\partial^2}{\partial s^2}\big|_0 d(t,s) = 0$. Коначно, мешовити извод:

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} d(t,s) = dF|_{\phi^t \circ \psi^s(x)} \phi^t_*|_{\psi^s(x)} G(\psi^s(x)) - \frac{\partial}{\partial s} d\psi^s|_{\phi^t(x)} F(\phi^t(x)),$$

што се сређивањем другог сабирка:

$$\frac{\partial}{\partial s} d\psi^s|_{\phi^t(x)} F(\phi^t(x)) = d(\frac{\partial \psi^s}{\partial s})|_{\phi^t(x)} F(\phi^t(x)) = dG|_{\psi^s \circ \phi^t(x)} F(\phi^t(x)),$$

и израчунавањем у нули своди на:

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 d(t,s) = dF|_x G(x) - dG|_x F(x) = -[F,G](x).$$

Дакле,

$$\phi^t \circ \psi^s(x) - \psi^s \circ \phi^t(x) = -[F,G](x)ts + o(t^2+s^2).$$

Задатак 3. *Ако су A, B матрице димензије n, доказати да важи*

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t}(e^{At}e^{Bs}e^{-At}) = [A,B],$$

где је $[A,B] = AB - BA$ комутатор матрица.

Нека својства комутатора су:
$[F_1 + F_2, G] = [F_1, G] + [F_2, G]$,
$[G, F] = -[F, G]$,
$[F, fG] = (Ff)G + f[F, G]$,
$[F, [G, H]] + [H, [F, G]] + [G, [H, F]] = 0$,
$[\varphi_* F, \varphi_* G] = \varphi_*[F, G]$ за неки дифеоморфизам φ.

Задатак 4. *Испитати комутативност следећих поља у равни:*
а) $F = \frac{\partial}{\partial x}$, $G = \frac{\partial}{\partial y}$,
б) $F = \frac{\partial}{\partial x}$, $G = (1+x^2)\frac{\partial}{\partial y}$.

Задатак 5. *Показати да поља $F = f(x)\frac{\partial}{\partial x}$ и $G = g(y)\frac{\partial}{\partial y}$ у равни увек комутирају.*

Задатак 6. *Нека је дато поље $F = (x, y, 2z)$ и ток $\psi^s(x,y,z) = (x\cos s - y\sin s, x\sin s + y\cos s, e^s z)$.*

а) Одредити ток ϕ^t који генерише поље F.

б) Одредити поље које генерише ток ψ^s.

в) Испитати да ли токови ϕ^t и ψ^s комутирају на два начина (директно, и помоћу комутатора поља).

Задатак 7. *Ако су A, B квадратне матрице, и $F(x) = Ax, G(x) = Bx$ векторска поља, доказати да важи*

$$[F,G] = -[A,B]x,$$

где је $[A,B] = AB - BA$ комутатор матрица.