Линеарне диференцијалне једначине вишег реда

ДЈ вишег реда су просто једначине у којима се појављују изводи вишег реда, рецимо $\ddot{x} = \sin \dot{x} + x$, а линеарне ДЈ вишег реда су оне у којима се изводи непознате функције појављују као линеарни чланови, рецимо $\ddot{x} = -\omega^2 x$, $\omega \in \mathbb{R}$, или $x''' + tx'' + t^2x' + t^3x = 0$.

Најједноставније једначине су хомогене линеарне ДЈ са константним коефицијентима, оне су облика

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0, \tag{1}$$

где су a_k реални бројеви. Ове једначине се решавају преко карактеристичне једначине – карактеристична једначина за (1) је једначина

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0. \tag{2}$$

Дакле то је једначина која се добија тако што заменимо извод функције x^k одговарајућим степеном λ^k. Решења ДЈ добијамо помоћу корена карактеристичне једначине, ако су корени једначине (2) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ различити, решења ДЈ (1) ће бити функције [1] $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}$, дакле линеарне комбинације функција $e^{\lambda_k t}$ (пошто је ДЈ хомогена линеарна).

Задатак 1. *Решити једначину* $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0$.

> *Решење:* Карактеристична једначина је $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, па су њена решења $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, па је опште решење ДЈ $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ за неке $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ који зависе од почетних услова.

Компликованије је када карактеристична једначина има вишеструке корене:

Задатак 2. *Решити једначину* $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$.

> *Решење:* Карактеристична једначина је $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$, па је -1 двоструки корен. Лако можемо да проверимо да је e^{-t} једно решење, а друго можемо да нађемо на следећи начин: ако помножимо једначину са e^t, добијамо $e^t\ddot{x} + 2e^t\dot{x} + e^t x = 0$, што је исто као $(e^t x)'' = 0$. Ова једначина се лако решава: $e^t x = c_1 + c_2 t$, па је $x = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$. Дакле друго решење је функција te^{-t}.

Једначину из задатка 1 можемо да решимо и свођењем на систем: ако поставимо $x_1(t) = x(t), x_2(t) = \dot{x}(t)$, онда је једначина еквивалентна систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 3x_2 - 2x_1. \end{aligned}$$

[1] Ово је опште решење, значи свако решење ДЈ је овог облика.

Општије, једначина (1) је еквивалентна систему

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\cdots \\
\dot{x}_n &= \frac{-1}{a_n}(a_{n-1}x_n + \cdots + a_1x_2 + a_0x_1),
\end{aligned} \tag{3}$$

па тако можемо и да је решимо. Систем (3) може да се запише и као $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, где је

$$A = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
-\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-2}}{a_n} & -\frac{a_{n-1}}{a_n}
\end{bmatrix}.$$

Карактеристични полином ове матрице [2] је

$$p_A(\lambda) = (-1)^n \left(\lambda^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}\lambda^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}\lambda + \frac{a_0}{a_n}\right).$$

па је једначина $p_A(\lambda) = 0$ еквивалентна карактеристичној једначини ДЈ (1). Према томе, у Жордановој форми ће се појављивати функције облика

$$e^{\lambda_k t},\ te^{\lambda_k t}, \ldots,\ t^{m_k-1}e^{\lambda_k t}$$

за реалне корене λ_k (овде је m_k вишеструкост корена λ_k), односно

$$\begin{aligned}
e^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t),\ e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t),\ te^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t),\ te^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t), \ldots, \\
t^{m_k-1}e^{\alpha_k t}\cos(\beta_k t),\ t^{m_k-1}e^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t)
\end{aligned}$$

ако је $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ комплексно. Због тога ће свако x_k бити линеарна комбинација ових функција, па и x_1 (којим смо заменили x из почетне једначине), па ће то бити опште решење једначине (1).

Једини проблем је то да ли ће у Жордановој форми матрице A бити по један блок за сваку сопствену вредност. Рецимо, у задатку 2, када бисмо свели једначину $\ddot{x}+2\dot{x}+x = 0$ на систем, добили матрицу A, знамо да је -1 двострука сопствена вредност, зашто Жорданова форма ове матрице не би могла да буде просто дијагонална матрица, већ мора да има јединице изнад главне дијагонале? Тако мора бити јер су решења e^{-t} и te^{-t}, али у општем случају (можда) није очигледно да ће бити тако.

Теорема 1. *Простор решења једначине (1) је n-димензиони векторски простор.*

Доказ. Простор глатких функција $C^\infty(\mathbb{R})$ је векторски простор, а оператор $\mathcal{F} : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(x) = a_nx^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1x' + a_0x$ је линеаран на њему. Решења једначине (1) чине језгро овог оператора, па пошто је језгро линеаран потпростор, имамо да је скуп решења векторски простор. Још једно пресликавање показује да је он n- димензиони: нека

[2] Проверити за домаћи

је $\mathcal{K}$ пресликавање из скупа решења једначине (1) у $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{K}(x) = (x(0), x'(0), \ldots, x^{(n-1)}(0))$, тј. $\mathcal{K}$ слика решење у почетне услове. Ово пресликавање је линеарно (очигледно), и бијекција по Пикаровој теореми ("на" јер за сваки елемент скупа $\mathbb{R}^n$ постоји решење са тим почетним условом, и "1-1" јер је јединствено).

Напомена. Исто може да се уради за комплексне коефицијенте a_k и комплексновредносне функције x.

По овој теореми видимо да је простор решења n-димензиони, па у Жордановој форми не може да постоји више блокова за исту сопствену вредност, јер онда не бисмо имали довољно независних решења.

Теорему изнад смо спомињали више пута на курсу (ред једначине мора да одговара броју константи у општем решењу); ово је прецизна формулација за конкретан тип једначине.

Задатак 3. *Решити једначине:*

а) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$,
б) $x''' - 13x' - 12x = 0$,
в) $x''' - 7x'' + 16x' - 12x = 0$,
г) $x''' + 3x'' - 4x = 0$,
д) $x^{(6)} - 4x^{(5)} + 8x^{(4)} - 8x^{(3)} + 4x'' = 0$

Решење: а) Решења карактеристичне једначине су $\pm i\omega$, па је опште решење $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$. Ово је једначина линеарног хармонијског осцилатора са фреквенцијом[3] ω.
г) Карактеристична једначина је $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$. Приметимо да је један њен корен $\lambda_1 = 1$, а за остале се добија $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Дакле опште решење је $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t}$.

Нехомогена линеарна ДЈ вишег реда (са константним коефицијентима)

Ове једначине су облика $a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = f(t)$ за реалне бројеве a_k и глатку функцију f. Као иначе, решење можемо да нађемо у облику $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, где је x_h решење хомогене једначине $a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0$, а x_p једно партикуларно решење почетне једначине.

Задатак 4. *Решити једначине:*
а) $x''' - x'' + x' - x = t^2 + t$,
б) $x'' + x' + x = t^3$.

[3] ω се назива природном или резонантном фреквенцијом

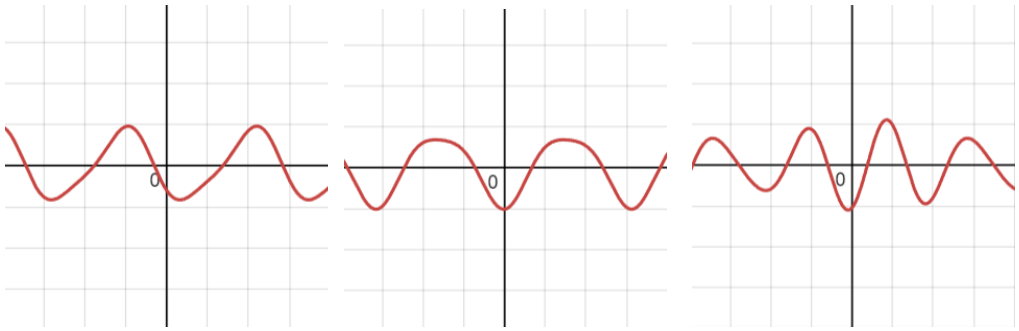
Решење: а) Пошто је са десне стране полином, можемо да нађемо партикуларно решење у облику полинома (довољно је другог степена јер ће се са леве стране добити полином другог степена): $x_p(t) = at^2 + bt + c$. Убацивањем у једначину добијамо: $-2a + b + 2at - at^2 - bt - c = t^2 + t$. Одавде се добија једно партикуларно решење $x_p(t) = -t^2 - 3t - 1$, а решење хомогене је $x_h = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t$. Опште решење: $x(t) = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t + -t^2 - 3t - 1$.

Задатак 5. *Решити једначину клатна фреквенције ω на које делује периодична сила фреквенције $\theta \neq \omega$:*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \cos(\theta t).$$

Решење: Приметимо да ако ставимо $x_p(t) = c\cos(\theta t)$, добијамо $-c\theta^2 \cos(\theta t) + c\omega^2 \cos(\theta t) = \cos(\theta t)$. Одавде је $c = 1/(\omega^2 - \theta^2)$. Решење хомогеног дела је познато, па је опште решење $x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + \cos(\theta t)/(\omega^2 - \theta^2) =^4 A\cos(\omega t - \varphi) + \frac{1}{\omega^2 - \theta^2}\cos(\theta t)$.

Претходни задатак нам показује да ако бисмо љуљали некога на љуљашци, ако то не радимо природном фреквенцијом љуљашке, не можемо много да повећамо амплитуду љуљања (испод су графици решења за неке конкретне вредности).



Задатак 6. *Решити једначину из претходног задатка за $\theta = \omega$:*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \cos(\omega t)$$

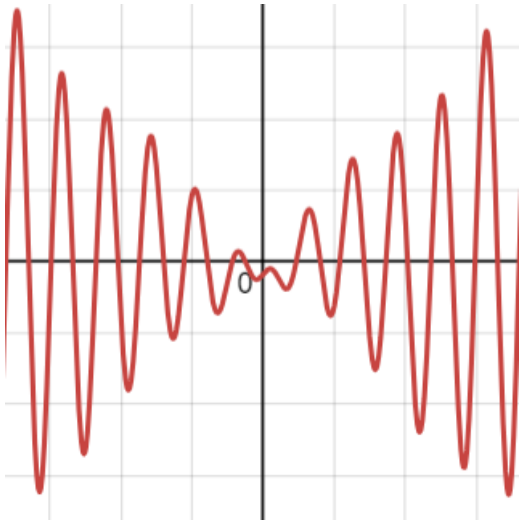
[4] Познати идентитет, $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(c_2/c_1)$

Решење: Интуитивно, пошто се фреквенција силе поклапа са природном фреквенцијом, треба да добијемо осцилације са растућом амплитудом. Ако пробамо да нађемо партикуларно решење облика $x_p(t) = t(a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t))$, добијамо

$$\begin{aligned}&2(-a\omega\sin(\omega t)+b\omega\cos(\omega t))-t\omega^2(a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t))\\&+\omega^2 t(a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t))=\cos(\omega t)\end{aligned}$$

и $a = 0$, $b = 1/(2\omega)$, па је једно партикуларно решење $x_p(t) = t\sin(\omega t)/(2\omega)$. Опште решење је $x(t) = A\cos(\omega t-\varphi)+t\sin(\omega t)/(2\omega)$.

Феномен из претходног задатка се зове резонанца, испод је график решења $x(t)$ из задатка:



Наравно, ово се не односи само на љуљашке, разне ствари могу да осцилују и свака има своју природну фреквенцију. Дакле, ако примењујемо периодичну силу праве фреквенције можемо неограничено да повећамо амплитуду осцилација (наравно, занемарили смо губитке енергије).

Мало општије, ако је функција f у нехомогеној једначини облика

$$f(t) = e^{\alpha t}(P_k(t)\cos(\beta t)+Q_l(t)\sin(\beta t)).$$

где су P_k, Q_l полиноми степена k, l, моћи ћемо да нађемо партикуларно решење облика

$$x_p(t) = t^s e^{\alpha t}(R_m(t)\cos(\beta t)+T_m(t)\sin(\beta t)), \tag{4}$$

где је s вишеструкост $\alpha+i\beta$ као корена карактеристичне једначине за хомогени део, а $m = \max\{k, l\}$. У претходним задацима је та вишеструкост била 0 и 1 па смо могли да нађемо партикуларна решења у датом облику.

Задатак 7. *Решити једначине:*

а) $x'' - x' - 2x = \cos(2t)$, $x(0) = 0, x'(0) = 1$
б) $x'' - 4x' + 5x = (\sin t + 2\cos t)e^{2t}$, $x(0) = 0, x'(0) = -\frac{1}{2}$
в) $x''' - x'' + x' - x = \cos t + e^{2t}$
г) $x'' - x = \sin^2 t$

Решење: а) Прво, карактеристична једначина за хомогени део је $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$, па је решење хомогеног дела $x_h(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$. Пошто $2i$ није решење карактеристичне једначине, $s = 0$ и можемо да нађемо партикуларно решење у облику $x_p(t) = a\cos(2t) + b\sin(2t)$. На крају се добија $a = -\frac{3}{20}$ и $b = -\frac{1}{20}$, па је $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{3}{20}\cos(2t) - \frac{1}{20}\sin(2t)$.
За решење са траженим п.у. убацујемо:

$$x(0) = 0 = c_1 + c_2 - \frac{3}{20}$$
$$x'(0) = 1 = -c_1 + 2c_2 - \frac{1}{10}$$

и добијамо $c_1 = -\frac{4}{15}$ и $c_2 = \frac{5}{12}$, па је тражено $x(t) = -\frac{4}{15}e^{-t} + \frac{5}{12}e^{2t} - \frac{3}{20}\cos(2t) - \frac{1}{20}\sin(2t)$.
в) Пошто десна страна једначине није у познатом облику, можемо да "поделимо" једначину на две: $x''' - x'' + x' - x = \cos t$ и $x''' - x'' + x' - x = e^{2t}$, нађемо партикуларна решења x_{p_1} и x_{p_2}, па ће коначно решење бити $x = x_h + x_{p_1} + x_{p_2}$.

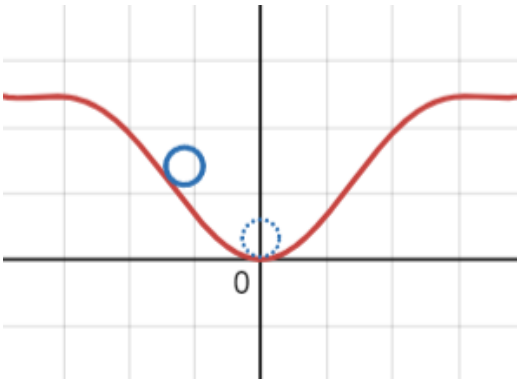
Као што смо код система облика $\dot{\mathbf{x}} = F(\mathbf{x})$ у еквилибријумима радили линеаризацију, исто тако, ако бисмо имали једначину $x^{(n)} = f(x^{(n-1)}, \ldots, x', x)$, где је f нека глатка функција, можемо да урадимо линеаризацију. Ако је $f(\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0) = f(\alpha) = 0$, онда можемо да формирамо једначину

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{\partial f}{\partial x^{(n-1)}}\Big|_\alpha \; y^{(n-1)} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x'}\Big|_\alpha \; y' + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_\alpha \; y \\ &= a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y, \end{aligned}$$

што је просто линеарна хомогена једначина са константним коефицијентима.

Пример 1. ***(Мале осцилације)*** *Ако имамо механички систем где сила зависи само од позиције, тј. једначина је облика* $\ddot{x} = f(x)$*, и* x_0 *је њен еквилибријум, тј.* $F(x_0) = 0$*. Тада линеаризацијом добијамо једначину* $\ddot{x} = ax -$ *и ако је* $a = -\omega^2 < 0$*, добијамо једначину линеарног хармонијског осцилатора. Ова једначина описује (апроксимира) кретање у околини еквилибријума на врло једноставан начин, као осцилацију, и ове осцилације зовемо малим осцилацијама.*

Задатак 8. *Нека је дата функција* $U(x)$*, и замислимо да на њен график спустимо куглицу масе* $m = 1$ *(такође узимамо гравитациону константу* $g = 1$*). Тада ће кретање куглице бити одређено једначином* $\ddot{x} = -U'(x)$ *(ово није тешко проверити, кренимо од* $F = ma = m\ddot{x}$*). Ако је* $x = 0$ *еквилибријум овог система, показати да ће постојати мале осцилације ако је* U *конвексна у нули и одредити њихову фреквенцију.*



Општи облик линеарне ДЈ вишег реда

До сада смо имали једначине са константним коефицијентима, али коефицијенти могу да буду функције времена:

$$a_n(t)x^{(n)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0, \tag{5}$$

а можемо и да додамо функцију са десне стране па да добијемо нехомогену једначину:

$$a_n(t)x^{(n)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t). \tag{6}$$

Постоје разне методе за решавање специјалних случајева ових једначина, као на пример метод варијације константи, Ојлерове једначине... Генерално, увођењем нових функција $x_1 = x, x_2 = x', \ldots, x_n = x^{(n-1)}$, једначина (5) може да се сведе на систем:

$$\begin{aligned}
x_1' &= x_2 \\
x_2' &= x_3 \\
&\cdots \\
x_{n-1}' &= x_n \\
x_n' &= -\frac{1}{a_n(t)}(a_{n-1}(t)x_n + \cdots + a_1(t)x_2 + a_0(t)x_1 - f(t)),
\end{aligned}$$

а ово је систем облика $\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$. Овај систем смо већ спомињали и "може" да се реши формулом

$$\mathbf{x}(t) = e^{\int A(t)} \left(\mathbf{c} + \int e^{-\int A(t)} \mathbf{g}(t) dt \right),$$

с тим што је она у општем облику готово немогућа за рачунање.

Задатак 9. *Извести формулу за партикуларно решење (4) у случају једначине*

$$x'' - x = P_k(t)e^t$$

користећи формулу изнад ($\mathbf{x_p} = e^{\int A(t)} \int e^{-\int A(t)} \mathbf{g}(t)dt$*).*