Повезаност (наставак)

Задатак 1. *Нека је X скуп несингуларних матрица ($\det \neq 0$) димензије n. Доказати да је X неповезан.*

Задатак 2. *Нека је X повезан метрички простор са бар две тачке. Доказати да је X непребројив.*

Задатак 3. *Нека је X метрички простор и $A, B \subset X$, $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = X$. Ако је $\mathrm{diam}A + \mathrm{diam}B < \mathrm{diam}X$, доказати да је X неповезан.*

> *Решење:* Од раније знамо да важи неједнакост $\mathrm{diam}A + \mathrm{diam}B + d(A,B) \geq \mathrm{diam}(A \cup B) = \mathrm{diam}X$, па заједно са неједнакошћу из задатка имамо:
>
> $$\mathrm{diam}A + \mathrm{diam}B + d(A,B) > \mathrm{diam}A + \mathrm{diam}B,$$
>
> тј. $d(A,B) = 2\varepsilon > 0$. Одавде следи $A \cap B = \emptyset$. Докажимо сада да су A и B отворени: нека је $x \in A$ и $K = B(x, \varepsilon)$ лопта са центром у x. Очигледно је $K \cap B = \emptyset$, па због $A \cup B = X$ мора бити $K \subset A$, тј. A је отворен. Слично доказујемо да је и B отворен и добијамо да је X неповезан.

Задатак 4. *Нека је X метрички простор са бар две тачке. Дефинишимо функцију*

$$f : X \to \mathbb{R}, \;\; f(x) = d(x, X \setminus \{x\}).$$

а) *Доказати да је f непрекидна.*
б) *Ако је X повезан, доказати да је $f = 0$.*
в) *Ако је X неповезан, да ли је $f \neq 0$?*

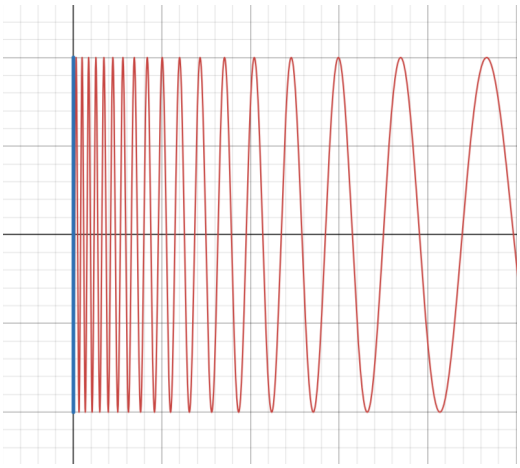
Пример 1. *Простори који су повезани али нису путно повезани су необични, познат пример је тополошка синусоида (видети слику) – то је скуп*

$$S = \{(x,y) : x > 0, \;\; y = \sin\frac{1}{x}\} \cup \{(0,y) : y \in [-1,1]\}.$$

Овај скуп очигледно није путно повезан јер се два његова дела нигде не додирују. Међутим, он јесте повезан: једини начин на који бисмо могли да представимо S као унију два отворена дисјунктна скупа јесте као у дефиницији, али леви део на слици није отворен. Ако узмемо тачку $P = (0,0)$ и неку њену околину $B(P, \varepsilon)$, та околина ће увек садржати део графика функције $y = \sin\frac{1}{x}$, за било које $\varepsilon > 0$. Дакле не постоји отворена околина тачке P унутар левог дела скупа.

Дефиниција 1. *Тополошки простор X је локално (путно) повезан ако за сваку тачку $x \in X$ и сваку њену отворену околину $U(x)$ постоји отворена околина $O(x) \subset U(x)$ која је (путно) повезана.*

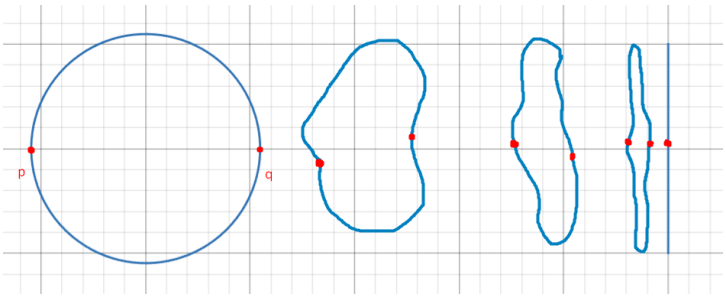
Локално повезан скуп не мора бити повезан – рецимо унија два интервала. Такође, повезан скуп не мора бити локално повезан – пример за ово је исто тополошка синусоида: било која довољно мала околина тачке P је неповезана јер садржи део усправне линије и бесконачно много неповезаних делова графика функције $\sin\frac{1}{x}$.



Фигуре 1: Тополошка синусоида

Задатак 5. ***(Борсук-Уламова теорема за*** $n = 1$***)*** *Нека је* $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ *непрекидна функција. Тада постоје две антиподалне тачке* $p, q \in \mathbb{S}^1$ *(*$p = -q$*) такве да је* $f(p) = f(q)$*.*

Борсук-Уламова теорема је тврђење идентично претходном задатку само са $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$. Доказ ове теореме користи напредне концепте топологије и није нимало лак.



Фигуре 2: Пресликавање $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$

Слично као што смо рекли да је простор путно повезан простор као простор где свако пресликавање из $\{0, 1\}$ у њега може непрекидно да се прошири на $[0, 1]$, тако имамо и следећу дефиницију:

Дефиниција 2. *Тополоши простор* X *је просто повезан ако свако пресликавање* $f : \mathbb{S}^1 \to X$ *може непрекидно да се прошири на диск* $\mathbb{D}^2$*.*

Ако простор није путно повезан, то значи да у њему постоје "рупе", на пример круг није путно повезан, јер део унутар њега није попуњен. Осмица као унија два круга са заједничком тачком такође није просто повезана – она има две рупе. Диск, раван и сфера су неки примери просто повезаних простора.

Путна повезаност се назива и 0-повезаност, а проста повезаност је 1-повезаност. Узимањем сфера више димензије у дефиницији изнад може да се добије дефиниција n-повезаности.

Задатак 6. *Да ли су цилиндар, торус и* $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ *просто повезани?*

Нека је X тополошки простор. Можемо да дефинишемо простор петљи $\Omega(X)$ – то је простор непрекидних пресликавања $\gamma : [0,1] \to X$, $\gamma(0) = \gamma(1)$. Једна посебна петља јесте константна петља, тј. за све $t \in [0,1]$ $\gamma(t) = x$ за неко фиксирано $x \in X$. Овде је пут од једне петље до друге у ствари цилиндар, петља на дну цилиндра је почетна "тачка", а петља на врху је крајња "тачка".

Задатак 7. *Ако је* $\Omega(X)$ *путно повезан, доказати да је* X *просто повезан простор.*