Повезаност

Овде ћемо радити повезаност и путну повезаност, а пошто је путна повезаност интуитивнији појам, кренућемо од ње.

Дефиниција 1. *Тополошки простор X је путно повезан ако за сваке две тачке $x, y \in X$ постоји непрекидно пресликавање (пут) од x до y:*

$$\gamma : [0,1] \to X,\ \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y.$$

Еквивалентно, простор је повезан ако за сваке две тачке $x, y \in X$ пресликавање $\gamma : \{0,1\} \to X$, $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ може непрекидно да се прошири на $[0,1]$.

Лако замишљамо путно повезане просторе, рецимо раван, круг, диск, сфера, торус...

Задатак 1. *Ако је X конвексан метрички простор, доказати да је X путно повезан.*

> *Решење:* Простор је конвексан ако за сваке две тачке у њему садржи и дуж која их спаја. Према томе, сваке две тачке у конвексном простору могу да се повежу путем.

Задатак 2. *Ако су X, Y повезани простори и $X \cap Y \neq \emptyset$, доказати да је $X \cup Y$ путно повезан.*

> *Решење:* Нека $a, b \in X \cup Y$. Ако a и b припадају истом скупу, онда по услову постоји пут између њих. Претпоставимо онда да $a \in X \setminus Y$ и $b \in Y \setminus X$. Тада можемо да узмемо једну тачку $c \in X \cap Y$ и повежемо a са c (јер су обе у X), па c са b (јер су обе у Y) и добијемо пут од a до b. Прецизније, ако γ_1 спаја a и c, а γ_2 спаја c и b, дефинишимо $\gamma : [0,1] \to X \cup Y$:
>
> $$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_2(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$
>
> Видимо да је γ непрекидно јер је непрекидно на $[0, 1/2]$ и на $[1/2, 1]$, а $\gamma_1(1/2) = \gamma_2(1/2)$.

Задатак 3. *Нека су $X_0, X_1, \ldots, X_n$ путно повезани простори и нека је $X_0 \cap X_i \neq \emptyset$ за све $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Доказати да је $X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_n$ путно повезан.*

Дефиниција 2. *Компонента путне повезаности тачке $x \in X$ је скуп $\{y \in X : \exists$ пут $\gamma, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}$.*

Задатак 4. *За које c су следећи скупови путно повезани:*
а) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = c\}$
б) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3 + x^2 + c\}$

Задатак 5. *Показати да скуп $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = e^x\}$ није путно повезан.*

Решење: Узмимо тачке $(0,1),(0,-1)$ и претпоставимо да постоји пут $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ кроз S који их спаја. Ако посматрамо функцију $y(t)$, она је непрекидна и важи $y(0) = 1, y(1) = -1$, па мора постојати $c \in (0,1)$ такво да је $y(c) = 0$ – али у скупу S не постоји тачка где је $y = 0$, контрадикција.

Иако је у прошлом задатку растојање између две компоненте путне повезаности 0, ипак нису повезане.

Задатак 6. *Нека је X путно повезан простор, $a, b \in X$ и $f : X \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Доказати да постоји $x \in X$ такво да је*

$$2f(x)^2 = f(a)^2 + f(b)^2.$$

Задатак 7. *Нека је X путно повезан простор, $a, b \in X$ и $f : X \to \mathbb{R}$ непрекидна функција. Доказати да постоји $x \in X$ такво да је*

$$\sum_{k=0}^{7} f(a)^k f(b)^{7-k} = 8f(x)^7.$$

Решење: Нека је Б.У.О. $f(a) < f(b)$ (ако је $f(a) = f(b)$ узмемо само $x = a$), и нека је $\gamma(t)$ пут који спаја a и b. Приметимо да је лева страна једнакости ограничена одоздо са $8f(a)$, а одозго са $8f(b)$. Даље, пошто је $f \circ \gamma$ непрекидна функција, она мора да узима све вредности у интервалу $[f(a), f(b)]$ по теореми о међувредности, па ће постојати x које задовољава тражену једнакост.

Наведимо сада нека својства путно повезаних простора (пробајте да их докажете сами, ако не успете погледајте предавања):

Став 1. *Непрекидна слика путно повезаног простора је путно повезана.*

Став 2. *Декартов производ путно повезаних скупова је путно повезан скуп.*

Став 3. *Свака непрекидна функција из путно повезаног простора X у $\{0,1\}$ је константна.*

Задатак 8. *Нека је $X = C[0,1]$ и $A = \{f \in X : f(0) \leq f(1)\}$, $B = \{f \in X : f(0) < f(1)\}$, $C = \{f \in X : f(0) > f(1)\}$. Испитати путну повезаност $A \cup C$ и $A \cup C$.*

Решење: Очигледно је $A \cup C = X$, а пошто је X конвексан, он је и путно повезан. Покажимо да $B \cup C$ није путно повезан: нека γ спаја две функције $f \in B$, $g \in C$ ($B \cap C = \emptyset$), и нека је $\varphi : X \to \mathbb{R}$ функција дефинисана са $\varphi(f) = f(1) - f(0)$. Очигледно (ако нисте сигурни докажите) је да је φ непрекидна, као и да је $\varphi(B) = \mathbb{R}^+$ и $\varphi(C) = \mathbb{R}^-$, тј. $\varphi(B \cup C) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, што није путно повезан скуп, па ни $B \cup C$ није због става изнад.

Задатак 9. *Показати да лопта у путно повезаном простору не мора бити путно повезана.*

Уопштење путне повезаности је повезаност:

Дефиниција 3. *Скуп X је повезан ако не може да се представи као дискунктна унија два непразна отворена скупа.*

Еквивалентно, скуп X је повезан ако не постоји непрекидно сурјективно пресликавање из X у $\{0,1\}$. Упоредите ово са ставом 3.

Став 4. *Путно повезан простор је повезан.*

Дефиниција 4. *Компонента повезаности тачке $x \in X$ је скуп $\bigcup_{A \subset X} A$, где се унија узима по повезаним скуповима A који садрже x.*

Компоненте повезаности су наравно повезани скупови.

Пример 1. *Докажимо да је скуп $B \cup C$ из задатка 8 неповезан. Подсетник: $B, C \subset C[0,1]$,*

$$B = \{f \in X : f(0) < f(1)\},\ C = \{f \in X : f(0) > f(1)\}.$$

Као у решењу задатка, нека је $\varphi(f) = f(1) - f(0)$. φ је непрекидна, $B = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^+)$ и $C = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^-)$, па су B, C отворени као инверзне слике отворених скупова, и дисјунктни су, па је $B \cup C$ неповезан.

Задатак 10. *Доказати да је отворен и повезан скуп $X \subset \mathbb{R}^n$ путно повезан. Тј. за отворене подскупове еуклидског простора, повезаност и путна повезаност су еквивалентни појмови.*

> *Решење:* Доказаћемо да су компоненте путне повезаности отворени скупови. Према томе, ако X није путно повезан, није ни повезан (јер може да се представи као унија више отворених скупова), што је контрапозиција тврђења. Нека је C_x компонента путне повезаности тачке x и $y \in C_x$. Пошто је X отворен, постоји лопта $B = B(y, \varepsilon) \subset X$, која је путно повезана (јер је конвексна на пример), па је $B \subset C_x$ по задатку 2, што значи да је C_x отворен скуп.

Треба бити опрезан са отвореним и затвореним скуповима, на те особине утиче амбијентни простор. Рецимо, $A = (0,1)$ је отворен (и није затворен) у $\mathbb{R}$, али је затворен у $X = (0,1) \cup (2,3)$ јер је комплемент $X \setminus A$ отворен. Или, A садржи све своје тачке нагомилавања (ту нису 0 и 1 јер оне ни не припадају X), па је затворен. Слично, $[0,1]$ је отворен у $[0,1] \cup [2,3]$.

Конкретно у претходном задатку је свеједно да ли је X или $\mathbb{R}^n$ амбијентни простор јер је исто, али треба нагласити шта је амбијентни простор ако није очигледно.

Задатак 11. *Нека је X скуп свих строго монотоних непрекидних функција $f : [0,1] \to [0,1]$, и нека X_1 чине све строго растуће функције, а X_2 строго опадајуће. Доказати да X није повезан и да су X_1, X_2 његове компоненте повезаности.*

Задатак 12. *Ако је A повезан и $A \subset B \subset \overline{A}$, онда је и B повезан.*

Решење: Претпоставимо супротно – да B није повезан, тј. да постоји непрекидна сурјекција $f : B \to \{0,1\}$. Пошто је A повезан, f је константна на A, Б.У.О. $f(A) = 0$. Даље, пошто B сем тачака из A садржи само тачке нагомилавања скупа A, ако $b \in B$, постоји низ $a_n \in A$ такав да $a_n \to b$. Због непрекидности онда је $f(b) = f(\lim a_n) = \lim f(a_n) = 0$, па је $f(B) = 0$, контрадикција са сурјективношћу.

Задатак 13. *Доказати да су компоненте повезаности затворени скупови.*

Решење: По претходном задатку, ако је C_x компонента повезаности тачке x, скуп $\overline{C_x}$ је такође повезан и садржи x, па је $\overline{C_x} \subset C_x$. Свакако важи и $C_x \subset \overline{C_x}$, па је $C_x = \overline{C_x}$, тј. C_x је затворен.

Задатак 14. *Ако су скупови A, B повезани, да ли морају бити повезани скупови*

$$\partial A,\ \mathrm{int}A,\ A^C,\ A \cup B,\ A \cap B\ ?$$

Повезани скупови имају слична својства као путно повезани скупови (упоредите са ставовима за путно повезане):

Став 5. *Непрекидна слика повезаног простора је повезана.*

Став 6. *Простор X је неповезан акко постоји непрекидна сурјекција $f : X \to \{0,1\}$.*

Задатак 15. *Нека су $X_0, X_1, \ldots, X_n$ повезани простори и нека је $X_0 \cap X_i \neq \emptyset$ за све $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Доказати да је $X_0 \cup X_1 \cup \cdots \cup X_n$ повезан.*

Задатак 16. *Нека су A, B дисјунктни непразни подскупови метричког простора X.*

а) *Ако не постоји $x \in X$ такво да је $d(x, A) = d(x, B)$, доказати да је X неповезан.*

б) *Ако је $d(A, B) = 2$ и не постоји $x \in X$ такво да је $d(x, A) = d(x, B) = 1$, да ли је X нужно неповезан?*

Задатак 17. *Нека су $f, g : X \to [0,1]$ непрекидне функције на повезаном тополошком простору X. Ако је f сурјективна, доказати да постоји $x \in X$ за које је $f(x) = g(x)$.*

Задатак 18. *Нека је X тополошки простор и $A \subset X$.*

а) *Доказати да је $\mathrm{int}A \cup \mathrm{int}A^C$ неповезан.*

б) *Ако је $\gamma : [0,1] \to X$ крива у X и $\gamma(0) \in A$, $\gamma(1) \in A^C$, доказати да постоји t такво да је $\gamma(t) \in \partial A$.*

Задатак 19. *Испитати повезаност, ограниченост и компактност скупа*

$$A = \{f \in C[0,1] : f(x) = ax + b,\ a, b \in [0,1]\},$$

са метриком $d(f, g) = \max_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$.

Решење: A је путно повезан јер је конвексан, прецизније: ако је $f(x) = ax + b$ и $g(x) = cx + d$, можемо да направимо пут између f и g:

$$\gamma(t)(x) = (a(1-t) + ct)x + (b(1-t) + dt).$$

Пошто је путно повезан, он је и повезан. Компактност и ограниченост су за домаћи.
Други начин: Уочимо хомеоморфизам (доказати да је хомеоморфизам)

$$\varphi : [0,1]^2 \to A, \;\; \varphi(a,b)(x) = ax + b.$$

Дакле, A је хомеоморфан скупу $[0,1]^2$, па одатле видимо и да је повезан и да је компактан.