

Особине експоненцијалне расподеле

1. Радиоактивни извор емитује честице брзином описаном експоненцијалном $\mathcal{E}(1)$ расподелом тако да је вјероватноћа да се честица појави у наредних t секунди једнака $1 - e^{-t}$. Израчунати вјероватноћу да ће се честица појавити:
 - а) у следећој секунди
 - б) у следеће три секунде
 - в) између треће и четврте секунде од сада
2. Претпоставимо да је дужина радног вијека сијалице прије него што прегори експоненцијално расподијељена са очекивањем 10 сати. Особа X уђе у канцеларију у којој већ гори сијалица. Ако планира да проведе наредних 5 сати, израчунати вјероватноћу да ће завршити посао прије него што сијалица прегори.
3. Машина се састоји из двије независне компоненте A и B . За сваку од њих дужина рада до квара је случајна величина са експоненцијалном $\mathcal{E}(\lambda_A)$, односно $\mathcal{E}(\lambda_B)$ расподелом. Машина отказује у тренутку квара једне од компоненти.
 - а) Одредити средње вријеме до отказа машине.
 - б) Одредити вјероватноћу да компонента A узрокује отказ машине.
4. Играчка C има двије батерије чије су дужине рада X_1 и X_2 , независне и са експоненцијалном $\mathcal{E}(a)$, $a > 0$, расподелом. Играчка је оперативна само ако двије батерије истовремено раде. Дужина оперативног периода играчке C је X . Друга играчка D такође има двије батерије чије су дужине рада Y_1 и Y_2 , независне из експоненцијалне $\mathcal{E}(4a)$ расподеле. Играчка D прво користи једну батерију и када се она потроши одмах почне користити другу. Дужина оперативног периода играчке D је Y . Израчунати вјероватноћу да играчка C прва престане да ради.
5. Показати да важи
$$E(X^2 | X > 1) = E(X + 1)^2.$$
6. У пошти раде два службеника, сваки за по једним шалтером. Особе A, B и C истовремено улазе у пошту. A и B одмах заузимају шалтере, а C чека док неко од њих не заврши. Израчунати вјероватноћу да је A и даље у пошти након што су друге двије особе отишле, ако се зна да је дужина трајања опслуживања експоненцијално расподијељена са параметром $\lambda > 0$.
7. Шлепер са робом стиже на гранични прелаз на коме независно један од другог раде два царинска терминала. Оба су тренутно заузета, али нема никог у реду за чекање па царинјење шлепера почиње чим се ослободи један од терминала. Дужина трајања царинјења на терминалу i има експоненцијалу расподелу са очекивањем $\frac{1}{\lambda_i}$. Одредити очекивану дужину задржавања шлепера на прелазу.
8. Лифт L_1 у овом тренутку ради. Лифт L_2 биће стављан у употребу након што протекне t јединица времена од сада. Дужина радног вијека до отказа лифта L_i има $\mathcal{E}(\lambda_i)$ расподелу. Одредити вјероватноћу да L_1 први откаже.

9. Нека је дат систем опслуживања са два сервера у коме се клијент прво опслужује на серверу S_1 а затим на S_2 , после чега напушта систем. При томе, клијенти се опслужују редом којим стижу до сервера. Дужина трајања опслуживања на серверу i има $\mathcal{E}(\mu_i)$. Када је клијент Z ушао у систем затекао је слободан S_1 и два клијента код S_2 : клијента X чије је опслуживање у току и клијента Y који чека у реду. Одредити:
- P_X - вјероватноћу да опслуживање клијента X још увијек траје кад клијент Z пређе на S_2 ,
 - P_Y - вјероватноћу да је Y још увијек у систему кад клијент Z пређе на S_2 ,
 - Очекивано вријеме које Z проведе у систему.
10. Нека је дат систем опслуживања са два сервера у коме се клијент прво опслужује на серверу S_1 , а затим на S_2 после чега напушта систем. Нови клијент који дође и затекне заузет S_1 чека у реду. Када се заврши његово опслуживање на S_1 он прелази на S_2 уколико је тај сервер слободан, а ако је заузет он остаје код S_1 и блокира почетак опслуживања новог клијента на S_1 све док се S_2 не ослободи. Дужина трајања опслуживања на серверу i има $\mathcal{E}(\mu_i)$ расподелу. Када је клијент Z ушао у систем затекао је једног клијента на S_1 и једног клијента код S_2 . Одредити очекивану дужину временског периода који клијент Z проведе у систему.
11. Нека су X_i , $i = 1, \dots, n$ независне случајне величине са $\mathcal{E}(\lambda_i)$ расподелом. Одредити:
- $P\{X_1 < X_2 < X_3\}$
 - $P\{X_1 < X_2 | \max\{X_i, i = 1, 2, 3\} = X_3\}$
 - $E(\max\{X_i, i = 1, 2, 3\} | X_1 < X_2 < X_3)$

Пуасонов процес

12. Клијенти долазе у сервис у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом λ клијената до сату. Нека је $X(t)$ број клијената који дођу у сервис до тренутка $t \geq 0$. Нека је $0 \leq s < t$. Одредити:
- вјероватноћу да до тренутка t у сервис дође $n + k$ клијената, ако је до тренутка s дошло тачно n клијената;
 - вјероватноћу да до тренутка s дође n клијената, ако је до тренутка t стигло $n + k$ клијената;
 - $E(X(u) = X(s) | X(t) = n)$, $0 \leq s < t < u$.
13. Клијенти долазе у банку у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом 4 клијента по сату.
- Претпоставља се да су два клијента дошла у току првог сата рада банке. Израчунати вјероватноћу да су оба клијента стигла у првих 20 минута.
 - Познато је да 15% клијената чине правна лица, остали су физичка лица. Израчунати вјероватноћу да током осмочасовног радног времена банке не дође ниједно правно лице. Управо је подне и прошло је тачно три сата од отварања банке. У колико сати би се могао очекивати први наредни долазак правног лица?
14. Аутомобили који долазе са југа стижу у такси станицу у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $a > 0$ и независно од њих, таксисти са сјевера долазе у складу са Пуасоновим процесом интензитета $b > 0$. Одредити расподелу броја долазака таксија са југа између два узастопна доласка таксија са сјевера.

15. Возећи једносмјерном улицом која има само једну траку, аутомобили долазе до одређене локације у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$. Дијете које жели да пређе улицу баш на том мјесту чека док не види да неће наићи ниједан аутомобил у наредних t јединица времена. Израчунати очекивано вријеме чекања.
16. Аутомат који се налази у банци биљежи тренутке почетка и завршетка опслуживања, али не постоји могућност регистровања тачног момента када је клијент дошао до банкомата (и стао у ред). Познато је да је прошле суботе први клијент стигао до банкомата у 7.30. Према компјутерској евиденцији имамо следеће информације:

0	7.30	7.34
1	7.34	7.40
2	7.40	7.42
3	7.45	7.50

Претпоставља се да клијенти долазе до банкомата у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$. Одретити очекивани тренутак доласка клијента под бројем 1 узимајући у обзир наведене информације.

Ланци Маркова са дискретним временом

17. Регуларан новчић се баца бесконачно много пута и резултати бацања су $Y_0, Y_1, \dots$, при чему је Y_i индикатор да је пало писмо. Нека је

$$X_n = Y_{n-1} + Y_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Испитати да ли је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ланац Маркова.

18. Три бијеле и три црне куглице расподијељене су у двије кутије тако да свака од њих садржи по три куглице. У сваком кораку извлачи се по једна куглица из сваке кутије и куглица извађена из прве ставља се у другу и обрнуто. Нека X_n представља стање система након n корака. Показати да је (X_n) ланац Маркова и одредити матрицу вјероватноћа прелаза за један корак.
19. Претпостави се следеће: да ли данас пада киша или не зависи од временских прилика током претходна два дана. Посебно, претпостави се да: ако пада киша у последња два дана, онда ће сјутра падати са вјероватноћом 0.7; ако је падала данас а јуче није, сјутра ће падати са вјероватноћом 0.5; ако је падала јуче али не и данас, сјутра ће падати са вјероватноћом 0.4, а ако је претходна два дана било суво, сјутра ће падати са вјероватноћом 0.2. Моделирати описану ситуацију ланцем Маркова. Ако се зна да је киша падала у понедељак и уторак, израчунати вјероватноћу да ће падати и у четвртак.
20. Одређеног дана у неку фирму стижу розе (Р), плаве (П) или бијеле (Б) коверте. Ако данас стижу розе, сјутра ће бити Р,П,Б са вјероватноћама 0.5,0.4 и 0.1, редом. Ако су данас плаве, сјутра ће бити Р,П,Б, са вјероватноћама 0.3,0.4 и 0.3, редом, а ако су данас бијеле, сјутра ће бити Р,П,Б са вјероватноћама 0.2,0.3,0.5, редом.
- Моделирати описану ситуацију ланцем Маркова.
 - Израчунати вјероватноћу да након што су једног дана розе, наредна два дана долазе бијеле.
 - Данас су стигле розе. Израчунати вјероватноћу да неће долазити бијеле ниједног од следећа три дана.
 - Прије четири дана стигле су бијеле. Ако се зна да розе коверте нису долазиле од тада (па ни данас), израчунати вјероватноћу да су данас стигле бијеле.

21. Човјек прима зараду од 2 (у хиљадама еура) на почетку сваког мјесеца. Количина новца која му је потребна за трошак у току мјесеца независна је од количине новца коју има и износи i са вјероватноћом p_i , $i = 1, 2, 3, 4$, $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$. Ако на крају мјесеца има преко 3, он вишак новца даје у хуманитарне сврхе.

- Ако након примања зараде на почетку мјесеца човјек има капитал од 5, израчунати вјероватноћу да његов капитал буде 1 или мање у неком тренутку у наредна четири мјесеца.
- Ако човјек има капитал од 5 на почетку јануара, израчунати вјероватноћу да је његов капитал 4 на почетку маја, а да при томе, ни у једном тренутку није био мањи или једнак 1.

Класификација стања у ланцу Маркова

- стања i и j комуницирају ако је $p_{ij}(n) > 0$, за неко $n \in \mathbb{N}$ и $p_{ji}(n) > 0$, за неко $n \in \mathbb{N}$
- "бити у комуникацији" је релација еквиваленције која скупа стања S дијели на класе еквиваленције
- ланац је *несводљив* ако сва стања међусобно комуницирају, тј. припадају једној класи еквиваленције
- f_i -вјероватноћа да ће ланац из стања i некад поново доћи у стање i
- стање i је *повратно* ако $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) = +\infty$
- стање i је *пролазно* ако $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}(n) < \infty$
- ако је скуп стања S коначан, онда мора имати бар једно повратно стање
- повратност/пролазност је особина класе еквиваленције
- ланац који је несводљив и има коначан скуп стања мора имати сва стања повратна
- стање i има период d ако је $p_{ii}(n) = 0$ за $d \nmid n$ и $d = \text{NZD}\{n \in \mathbb{N} : p_{ii}(n) > 0\}$
- $d = 1$ - апериодично стање

22. Примјери:

(a) $S = \{1, 2, 3\}$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

(б) $S = \{1, 2, 3, 4\}$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(ц) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

Теорема. Несводљив апериодичан ланац Маркова са коначним скупом стања има граничну расподелу која је истовремено и (јединствена) стационарна расподела.

23. Жена има три кишобрана- неке код куће, а неке у канцеларији. Ако полази ујутру од куће или увече са посла и пада киша она ће узети кишобран, ако има кишобран на располагању, иначе жена покисне. Претпоставља се да, независно од прошлости, киша пада са вјероватноћом 0.25. Нека је X_n број кишобрана који су јој на располагању при n -том поласку (од куће или са посла). Ако су садашњи временски услови независни од прошлости, описати ситуацију ланцем Маркова.

- (а) Одредити период стања 0.
- (б) Израчунати колико (процентуално) жена покисне гледано у дужем временском периоду.
- (ц) На поласку од куће јутрос, био је један кишобран код куће. Израчунати очекивани број пута прије него жена не буде имала ниједан кишобран на располагању.

- f_{ij} - вјероватноћа да се први пут дође у стање j из стања i након n корака
- f_{ij} вјероватноћа да се дође из i у j икада

- $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}(n)$

- $f_{ii} =: f_i$

- μ_{ij} очекивано вријеме из i у j

- $\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}(n)$, ако је $f_{ij} = 1$, $\mu_{ij} = \infty$, ако је $f_{ij} < 1$

-

$$\mu_{ij} = 1 \cdot p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik}(1 + \mu_{kj}) = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik}\mu_{kj}$$

- Теорема: Ако је ланац Маркова несводљив, $\mu_{ii} = \frac{1}{\pi_i}$, $i \in S$

24. На фарми пилића залихе хране чувају се у складишту које може примити највише $2b - 1$ кг хране. Рано ујутру n -тог дана фармер узима B_n килограма хране да би нахранио пилиће, гдје је $B_n \in \{0, 1, \dots, b\}$. Вјероватноћа да фармеру одређеног дана треба k кг хране једнака је p_k , $\sum p_k = 1$. Штавише, количине хране потребне различитим данима су међусобно независне и независне од доступне количине хране у складишту. Даље, на крају сваког дана његова жена провјерава стање у складишту и допуњава са b кг хране, ако је количина строго мања од b килограма, иначе не допуњава.

- а) Одредити матрицу вјероватноћа прелаза за један корак.
- б) Нека је $b = 3$. Претпоставимо да је фармер јутрос затекао 5 кг хране у складишту. Израчунати очекивани број јутара који протекне док не затекне 3 кг хране у складишту.
- в) Одредити (процентуално гледано) дио укупног броја дана на дуже стазе таквих да се у складишту налази најмање 2 кг хране након што је фармер нахранио пилиће, а прије него што је жена провјерила складиште.

Ланци Маркова са непрекидним временом

- Прочитати теоријски увод са предавања.
- $\{X(t), t \geq 0\}$
- $p_{ij}(s, t) = P\{X(t) = j | X(s) = i\}$, $0 \leq s < t$
- $p_{ij}(t + s) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t)p_{kj}(s)$ [Колмогоров-Чепмен]
-

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} p_{ij}(h) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

-

$$q_{ii} := p'_{ii}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ii}(h) - p_{ii}(0)}{h} = \frac{p_{ii}(h) - 1}{h}$$

-

$$q_{ij} := p'_{ij}(0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h} = \frac{p_{ij}(h)}{h}, \quad i \neq j$$

- $Q = (q_{ij})$ инфинитезимальни генератор, $Q = P'(0)$
- $q_i := -q_{ii}$
- Теорема: скуп стања коначан, онда $q_{ii} + \sum_{i \neq j} q_{ij} = 0$

25. Запаљив производ складишти се у посебном резервоару на бензинској станици. Купци који желе да купе овај производ пристижу у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$. Сваки купац тражи тачно по једно паковање (мјерну јединицу) производа. Све потражње које се десе када су залихе производа распродате се не биљеже. Прилике да се допуни залиха у резервоару јављају се у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\mu > 0$. Претпоставља се да су ова два процеса независна. Из разлога безбиједности дозвољено је да се залиха допуни само онда када је у потпуности распордата (тј. када је резервоар празан). У тим ситуацијама она се допуњује са R јединица производа, гдје је R унапријед одређена вриједност.

- а) Моделирати описани проблем ланцем Маркова са непрекидним временом.
- б) Одредити просјечну количину залихе у резервоару, гледано на дуже стазе.

26. Бродови стижу на терминал у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$. Бродови доносе товари контејнера. Постоји само једна машина врши истовар терета и она не може да врши истовар више бродова истовремено. Бродови се истоварају по редоследу којим пристижу. Претпоставља се да пристаниште на коме се налази терминал има довољан капацитет да прими све бродове који чекају. Дужина трајања истовара за сваки брод је експоненцијално расподијељена случајна величина са параметром $\mu > 0$. Машина, међутим, подложна кваровима. Квар се може догодити само док машина ради. Дужина временског периода током ког је машина оперативна има експоненцијалну расподелу са параметром $\delta > 0$, а дужина трајања поправке са параметром $\beta > 0$. Сваки прекинут истовар брода наставља се тамо гдје је био прекинут. Претпоставља се да су дужине: трајања истовара, оперативног периода машине, трајања поправке, међусобно независне и независне од процеса у складу са којим бродови пристижу до терминала. Моделирати описани проблем ланцем Маркова са непрекидним временом.

27. Брод има два навигациона уређаја и једног механичара који отклања све њихове кварове, редом, како се они дешавају. Сваки од уређаја ради у временском интервалу чија дужина има експоненцијалну расподелу са очекиваним трајањем од 30 дана, док сваки квар захтијева поправку са очекиваним трајањем од два дана. Описати ситуацију ланцем Маркова са непрекидним временом и одредити проценат времена истовремене неисправности оба уређаја, гледано на дуже стазе.

28. Фризер може да направи фризуру у временском интервалу експоненцијално расподијељене дужине са очекивањем од 20 минута. Муштерије долазе у његов салон у складу са Пуасоновим процесом и то просјечно једна особа у пола сата, међутим, ако су у тренутку уласка муштерија у салон обје столице за чекање заузете, она одлази и не враћа се. Израчунати проценат времена када су у радњи три муштерије, гледано на дуже стазе.

- $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$ уметнути ланац Маркова

- $P = (p_{ij})$ матрица вјероватноћа прелаза за (Y_n)
- за i које није апсорбујуће стање

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sum_{j \neq i} q_{ij}}, \quad j \neq i$$

$$p_{ii} = 0$$

- за i које је апсорбујуће стање

$$p_{ii} = 1,$$

$$p_{ij} = 0, \quad i \neq j$$

- 29.** Нека је дат ланац Маркова са непрекидним временом који има скуп стања $S = \{1, 2, 3, 4\}$ и инфинитезимални генератор Q . Израчунати вјероватноће апсорпције из стања 1 и стања 2 у затворену класу $A = \{3\}$.

$$Q = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 30.** Нека је дат ланац Маркова са непрекидним временом који има скуп стања S и инфинитезимални генератор Q . Израчунати очекивано вријеме до апсорпције из стања 1 у апсорбујуће стање 4.

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- 31.** Један техничар одржава машине A и B . Сваки пут када је поправљена машина A односно B , ради у временском периоду експоненцијално расподијелене дужине са очекивањем, редом, $\frac{1}{\lambda_A}$, односно $\frac{1}{\lambda_B}$. Када се машина поквари, потребан је временски период експоненцијално расподијелене дужине са очекивањима $\frac{1}{\mu_A}$ и $\frac{1}{\mu_B}$, редом, да се обави њена поправка. Техничар увијек прво поправља машину A када је она у квару, тако да на пример ако се машина A поквари док је машина B на поправци, техничар престаје да ради на поправци машине B и почиње да поправља машину A .

- Одредити асимптотски проценат времена гледано на дуже стазе када је машина B у квару.
- Одредити асимптотски проценат времена гледано на дуже стазе када је техничар заузет поправком машина.