

Lanci Markova sa neprekidnim vremenom.

Primetimo: $q_{ii} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ii}(h) - 1}{h}$

$$\Rightarrow p_{ii}(h) = 1 + q_{ii} \cdot h + o(h) = 1 - g_{ii} \cdot h + o(h)$$

$$g_{ij}(h) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_{ij}(h)}{h}$$

$$\Rightarrow p_{ij}(h) = g_{ij}(h) \cdot h + o(h)$$

Ovako ćemo najbrže da određujemo q_{ii} i g_{ij} .

25. a) $X(t)$ - količina zaliha u trenutku t

$$S = \{0, 1, \dots, R\}$$

Lanac se kreće ciklično:

$$R \xrightarrow{\lambda} R-1 \xrightarrow{\lambda} R-2 \xrightarrow{\lambda} \dots \xrightarrow{\lambda} 1 \xrightarrow{\lambda} 0$$



b) N_1 - proces pristizanja kupaca, intenziteta λ

N_2 - proces pristizanja zaliha, intenziteta μ

Ođređujemo verovatnoće prelaza:

$$i \in \{1, \dots, R\} \quad p_{0, i-1}(h) = p\{N_1(h) = 1\} = \frac{e^{-\lambda h} \cdot \lambda h}{1} = \lambda h (1 - \lambda h + o(h)) = \underbrace{(\lambda h + o(h))}_{g_{0, i-1}}$$

$$p_{i0}(h) = p\{N_1(h) = 0\} = e^{-\lambda h} = 1 - \underbrace{(\lambda h + o(h))}_{g_{ii}}$$

Mogli smo i da primenimo: $g_{ii} + \sum_{j \neq i} g_{ij} = 0$

$$\Rightarrow g_{ii} + \lambda = 0$$

$$i=0: p_{0R}(h) = p\{N_2(h)=1\} = \frac{e^{\mu h} \cdot \mu h}{1} = \underbrace{\mu}_{g_{0R}} h + o(h)$$

$$\Rightarrow g_{00}(h) = -\mu$$

$$Q = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & 0 & \dots & \mu \\ \lambda & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -\lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{bmatrix}$$

Stacionarna raspodela:

$$\tilde{\pi} \cdot Q = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} -\mu \cdot \tilde{\pi}_0 + \lambda \cdot \tilde{\pi}_1 = 0 \\ -\lambda \cdot \tilde{\pi}_1 + \lambda \tilde{\pi}_2 = 0 \\ -\lambda \cdot \tilde{\pi}_2 + \lambda \tilde{\pi}_3 = 0 \\ \vdots \\ -\lambda \tilde{\pi}_{R-1} + \lambda \tilde{\pi}_R = 0 \\ \mu \tilde{\pi}_0 - \lambda \tilde{\pi}_R = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \tilde{\pi}_1 = \tilde{\pi}_2 = \dots = \tilde{\pi}_R \\ \tilde{\pi}_0 = \frac{\lambda}{\mu} \tilde{\pi}_1 \end{array}$$

$$\tilde{\pi}_0 + \dots + \tilde{\pi}_R = 1 \Rightarrow (R + \frac{\lambda}{\mu}) \tilde{\pi}_1 = 1 \quad \begin{array}{l} \tilde{\pi}_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu R} \\ \text{"} \\ \tilde{\pi}_2 = \dots = \tilde{\pi}_R \end{array} \quad \tilde{\pi}_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu R}$$

* U ovom zadatku nismo morali da određujemo Q kako bismo našli stacionarnu raspodelu:

Čekanje na prelaz iz i u $i-1$ ima $E(\lambda)$ raspodelu dok čekanje na prelaz iz 0 u R ima $E(\mu)$ raspodelu

$$\Rightarrow \text{Prosečno zadržavanje u } i (i \neq 0): E(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Prosečno zadržavanje u } 0: E(\mu) = \frac{1}{\mu}$$

$$\Rightarrow \bar{J}_{00} = \frac{\frac{1}{\mu}}{\frac{1}{\mu} + R \cdot \frac{1}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu R} \quad , \quad \bar{J}_i (i \neq 0) = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\mu} + R \cdot \frac{1}{\lambda}} = \frac{\mu}{\lambda + \mu R}$$

Ovo smo mogli da primenimo zato što je lanac cikličan. U opštem slučaju lanac ima komplikovaniju strukturu skokova, i vreme zadržavanja nije proporcionalno stacionarnoj raspodeli.

Y - količina zaliha, $EY = 1 \cdot \bar{J}_1 + \dots + R \cdot \bar{J}_R = \boxed{\frac{\mu}{\lambda + \mu R} \cdot \frac{R(R+1)}{2}}$

26. $X(t)$ - dvodimenzioni lanac Markova

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t))$$

broj brodova koji čekaju
 $S_1 = \{0, 1, \dots\} = \mathbb{N}$

da li je mašina ispravna
 $S_2 = \{0, 1\}$

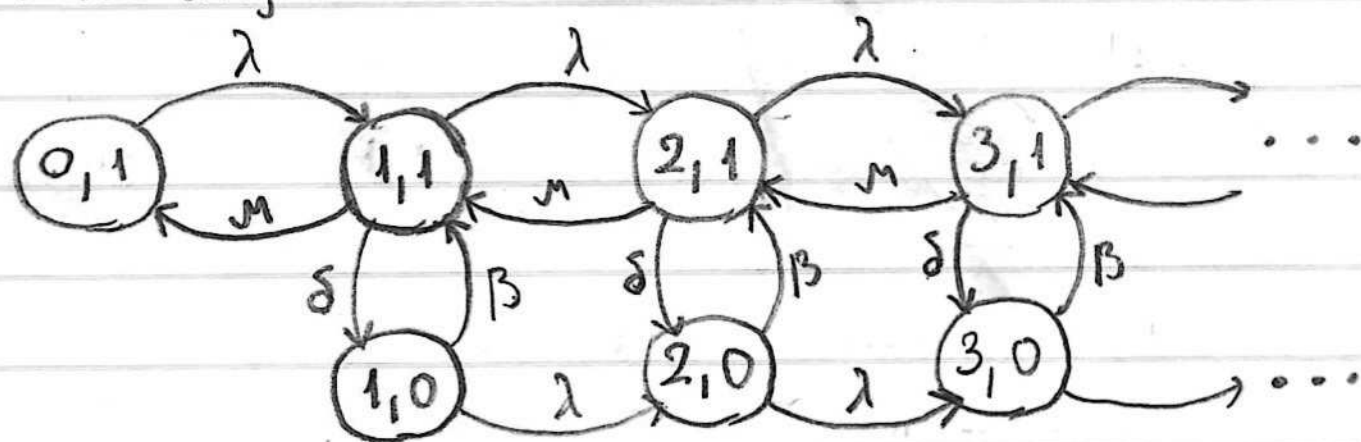
$E(\lambda)$ - vreme dolaska broda

$E(\mu)$ - trajanje istovara

$E(\delta)$ - vreme do kvara mašine

$E(\beta)$ - trajanje popravke

Predstavljamo lanac:

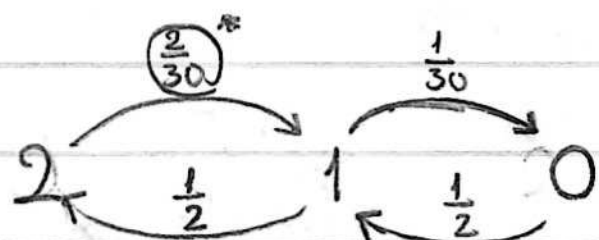


27. $X(t)$ - broj ispravnih uređaja

$$S = \{0, 1, 2\}$$

$\xi(\frac{1}{30})$ - trajanje ispravnosti svakog od uređaja

$S(\frac{1}{2})$ - trajanje popravke



* Kada su oba uređaja ispravna, čekamo da se prvi pokvari, što ima $\xi(\frac{1}{30} + \frac{1}{30})$ raspodelu.

Generalno (ni na ispitu) nema potrebe formalno izvoditi Q. Iz odgovarajućih intenziteta Puasonovih procesa, odnosno eksponencijalnih raspodela, je lako uočiti pravilnost.

Npr.
$$p_{01}(h) = \frac{e^{-\frac{1}{2}h} \cdot (\frac{1}{2}h)}{2^{01}} = \left(\frac{1}{2}\right)h + o(h)$$

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{30} & -(\frac{1}{30} + \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{30} & -\frac{2}{30} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{J} \cdot Q = 0 : \quad & -\frac{1}{2} \bar{J}_0 + \frac{1}{30} \bar{J}_1 = 0 \\ & \frac{1}{2} \bar{J}_0 - \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{2}\right) \bar{J}_1 + \frac{2}{30} \bar{J}_2 = 0 \\ & \frac{1}{2} \bar{J}_1 - \frac{2}{30} \bar{J}_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{J}_1 = 15 \bar{J}_0$$

$$\bar{J}_2 = \frac{15}{2} \bar{J}_1 = \frac{225}{2} \bar{J}_0$$

$$\bar{J}_0 + \bar{J}_1 + \bar{J}_2 = 1 \Rightarrow \bar{J}_0 = \frac{1}{1 + 15 + \frac{225}{2}} = \boxed{\frac{2}{257}}$$

Procenat istovremene neispravnosti oba uređaja je $J_{10} = \frac{2}{257}$

28. Merimo vreme u satima:

$\xi(3)$ - šišanje

$\xi(2)$ - dolazak nove mušterije

$X(t)$ - broj mušterija u salonu

$$S = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$J_{13} = ?$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

... za vežbu

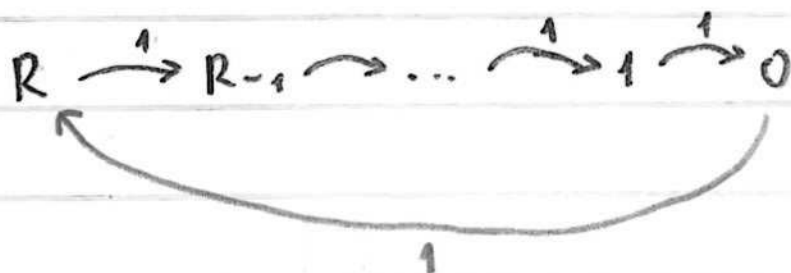
Umetnuti lanac Markova

Ako nas ne zanima vreme provedeno u različitim stanjima, već samo redosled po kom lanac posećuje stanja, onda posmatramo umetnuti lanac, $\{Y_n, n \in \mathbb{N}_0\}$

pr. 25. zadatak - umetnuti lanac je deterministički sa matricom prelaza:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

, tj.



pr. 28. zadatak

Kada je u salonu 1 mušterija, sledeće stanje lanca može da bude 0 ili 2, tj. da ta mušterija prvo završi sa šišanjem, ili da pre pristigne sledeća mušterija. Ovde se "takmiče" 2 eksponencijalne raspodele, $\xi(3)$ i $\xi(2)$.

$\uparrow$ šišanje $\uparrow$ dolazak mušterija

Tada je $p_{10} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$, a $p_{12} = \frac{2}{5}$

$\uparrow$
 $p\{\xi(3) < \xi(2)\}$

Opštije, $p_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sum_{l \neq i} g_{il}}$

Takođe, prosečno vreme zadržavanja u stanju 1 je

$$E(\min\{\xi(3), \xi(2)\}) = \frac{1}{2+3}$$

Opštije, $T_0 \sim E(\sum_{j \neq 0} g_{0j})$, $ET_0 = \frac{1}{\sum_{j \neq 0} g_{0j}}$

29. Verovatnoća apsorpcije predstavlja verovatnoću da lanac, počevši od određenog stanja, ikada uđe u konkretno apsorbujuće stanje.

$$Q = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P_{\text{(cuktnutog lanca)}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ovaj lanac ima 2 apsorbujuća stanja, 3 i 4, dok stanja {1, 2} čine klasu komunikacije koja je prolazna. Neformalno govoreći, lanac se vrti između stanja 1 i 2, dok ne uđe u jedno od dva apsorbujuća stanja, u kom ostaje zauvek.

$h_{1A}, h_{2A}, h_{3A}, h_{4A}$ - verovatnoće apsorpcije u $A = \{3\}$

$$h_{3A} = 1 \quad h_{4A} = 0$$

$$h_{1A} = \frac{1}{2} h_{2A} + \frac{1}{4} h_{3A} + \frac{1}{4} h_{4A} = \frac{1}{2} h_{2A} + \frac{1}{4}$$

$$h_{2A} = \frac{1}{2} h_{1A} + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow h_{1A} = \frac{1}{4} h_{1A} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \Rightarrow h_{1A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{9}$$

$$h_{2A} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{3} = \frac{11}{18}$$

$$30. \quad Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T_i - vreme provedeno u stanju i

$$T_1 \sim E(2)$$

$$T_2 \sim E(6)$$

$$T_3 \sim E(9)$$

k_{iA} - očekivano vreme do apsorpcije u stanje $A = \{4\}$

$$k_{1A} = ET_1 + \frac{1}{2} \cdot k_{2A} + \frac{1}{2} k_{3A}$$

$$k_{2A} = ET_2 + \frac{1}{3} \cdot k_{1A} + \frac{1}{3} k_{3A} + \frac{1}{3} \cdot k_{4A}$$

$$k_{3A} = ET_3 + \frac{1}{3} \cdot k_{1A} + \frac{1}{3} k_{2A} + \frac{1}{3} k_{4A}$$

$$k_{4A} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} k_{1A} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} k_{2A} + \frac{1}{2} k_{3A} \\ k_{2A} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{3} k_{1A} + \frac{1}{3} k_{3A} \\ k_{3A} &= \frac{1}{9} + \frac{1}{3} k_{1A} + \frac{1}{3} k_{2A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dots \Rightarrow k_{1A} = \frac{17}{12}$$

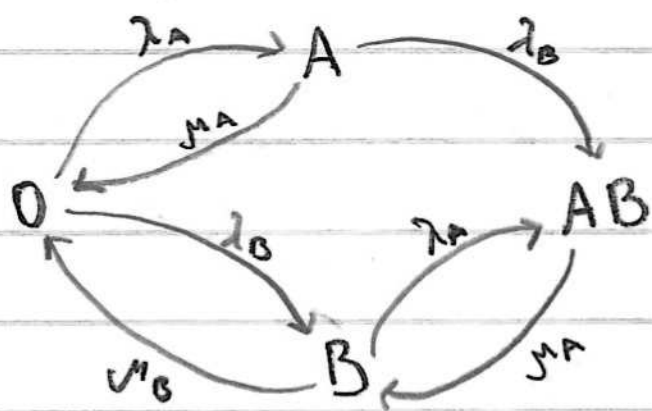
31. $S = \{0, A, B, AB\}$

0 - obe' rade

B - B u kvara, A radi

A - A u kvara,
B radi

AB - obe u kvara



$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & A & B & AB \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ A \\ B \\ AB \end{matrix} & \begin{bmatrix} -(\lambda_A + \lambda_B) & \lambda_A & \lambda_B & 0 \\ \mu_A & -(\mu_A + \lambda_B) & 0 & \lambda_B \\ \mu_B & 0 & -(\mu_B + \lambda_A) & \lambda_A \\ 0 & 0 & \mu_A & -\mu_A \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$\pi Q = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow a) \pi_B$

b) $1 - \pi_0 = \pi_A + \pi_B + \pi_{AB}$