

Lanci Markova sa diskretnim vremenom

17. $Y_i \sim \text{Ber}(0.5)$, nezavisni

$$X_n = Y_{n-1} + Y_n$$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nije lanac Markova, jer X_{n-2} može da nosi dodatne informacije o X_n , u odnosu na X_{n-1} .

pr. $P\{X_n = 0 \mid X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 0\} = 0$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \downarrow \\ Y_{n-2} = 0 \\ \parallel \\ \downarrow \\ Y_{n-1} = 1 \end{array}$$

$$P\{X_n = 0 \mid X_{n-1} = 1\} > 0$$

18. Jasno je da naredno stanje zavisi samo od trenutnog,

pa je $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lanac Markova.

Stanje sistema može potpuno da se opiše brojem belih kuglica u prvoj kutiji:

X_n - broj belih u prvoj kutiji

$S = \{0, 1, 2, 3\}$ - moguća stanja

$X_n = 0 \Rightarrow$ Sigurno se izvlači crna i menja sa belom $\Rightarrow X_{n+1} = 1$

$$X_n = 1: P\{X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$$

$$P\{X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

$\begin{array}{c} \uparrow \quad \quad \quad \nwarrow \\ B_{12} I \quad \quad C_{12} II \\ \text{kutije} \quad \quad \text{kutije} \\ \uparrow \quad \quad \quad \nwarrow \\ B_{12} I \quad B_{12} II \quad C_{12} I \quad C_{12} II \\ \uparrow \quad \quad \quad \nwarrow \\ C_{12} I \quad \quad B_{12} II \end{array}$

$$P\{X_{n+1} = 2 \mid X_n = 1\} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Ostale verovatnoće se slično računaju.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

19. S obzirom da verovatnoća da će padati kiša zavisi od prethodna dva dana, u lancu Markova moramo da pamtimo jučerašnje stanje.

P - pada kiša, N - ne pada kiša

Y_n - da li je padala kiša u n -tom danu

$$Y_n \in \{P, N\}$$

$$X_n = (Y_{n-1}, Y_n)$$

$$X_n \in \{PP, PN, NP, NN\}$$

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} PP & PN & NP & NN \end{matrix} \\ \begin{matrix} PP \\ PN \\ NP \\ NN \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Ponedeljak i utorak pada kiša: $X_1 = (P, P)$

Četvrtak pada kiša: $X_3 = (P, P) \vee X_3 = (N, P)$

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.49 & 0.21 & 0.12 & 0.18 \\ 0.2 & 0.2 & 0.12 & 0.48 \\ 0.35 & 0.15 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.16 & 0.64 \end{bmatrix}$$

$$P\{X_3 = (P, P) \mid X_1 = (P, P)\} = 0.49$$

$$P\{X_3 = (N, P) \mid X_1 = (P, P)\} = 0.12$$

Verovatnoća da će u četvrtak padati kiša je

$$0.49 + 0.12 = 0.61.$$

20. a)

$$P = \begin{array}{c|ccc} & R & P & B \\ \hline R & 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ P & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ B & 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{array}$$

b) $P\{X_2=B, X_3=B | X_1=R\} = 0.1 \cdot 0.5 = 0.05$

v) Uvodimo pomoćni lanac Y_n u kojem bele predstavljaju apsorbujuće stanje (stanje iz kog lanac ne može da izađe).

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ako ijednom u naredna 3 dana stignu bele, Y_n će ostati u stanju B.

$$X_1=R \vee X_2=R \vee X_3=R \Leftrightarrow Y_3=B$$

Verovatnoće 3 dana unapred:

$$P_1^3 = \begin{bmatrix} 0.293 & 0.292 & 0.415 \\ 0.213 & 0.22 & 0.561 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P\{Y_3 \neq B | Y_0=R\} = 1 - 0.415 = 0.585$$

g) Posmatramo lanac Z_n u kom je R apsorbujuće stanje:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

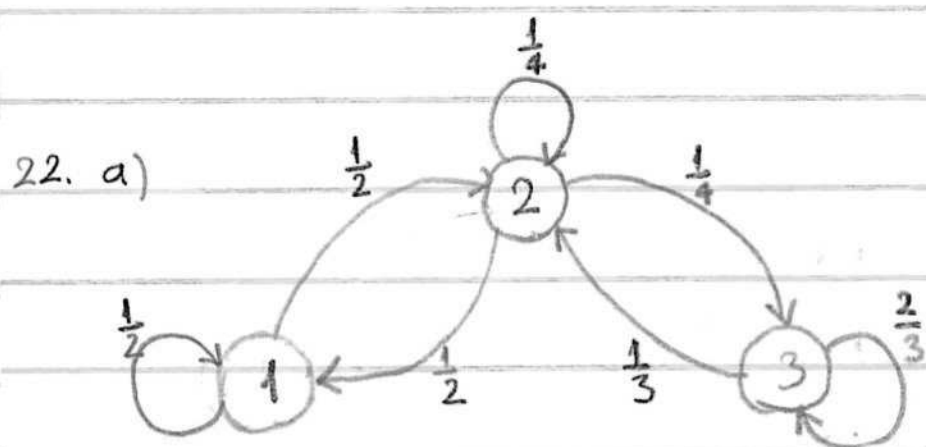
$$p\{Z_+ = B \mid Z_0 = B, Z_+ \neq R\} = \frac{p\{Z_+ = B \mid Z_0 = B\}}{p\{Z_+ \neq R \mid Z_0 = B\}} \quad (*)$$

Dane verovatnoće mogu da se pročitaju iz P_2^+ :

$$P_2^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.7053 & 0.1354 & 0.1593 \\ 0.6522 & 0.1593 & 0.1885 \end{bmatrix}$$

$$(*) = \frac{0.1885}{1 - 0.6522} \approx 0.542$$

Klasifikacija stanja.



Sva stanja međusobno komuniciraju.

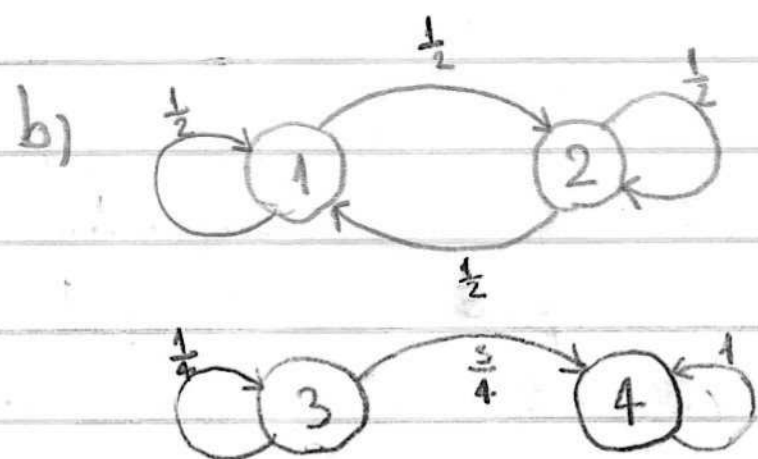
$\Rightarrow$ Lanac je nesvodljiv

$$|S| = 3 (< +\infty)$$

$\Rightarrow$ Postoji povratno stanje.

Sva stanja su povratna.

S obzirom da lanac iz svakog stanja može u jednom koraku da se vrati u isto ($p_{ii} > 0 \forall i \in S$), stanja su aperiodična. ($d=1$)



Klase komunikacije:

$$C_1 = \{1, 2\}$$

$$C_2 = \{3\}$$

$$C_3 = \{4\}$$

C_1 - zatvorena klasa, sva stanja su povratna. Ako se lanac nađe u $\{1, 2\}$, vrteće se beskonačno između ova dva stanja.

C_2 - otvorena klasa. Lanac ostaje u $\{3\}$ konačno dugo, i onda zauvek prelazi u $\{4\}$.

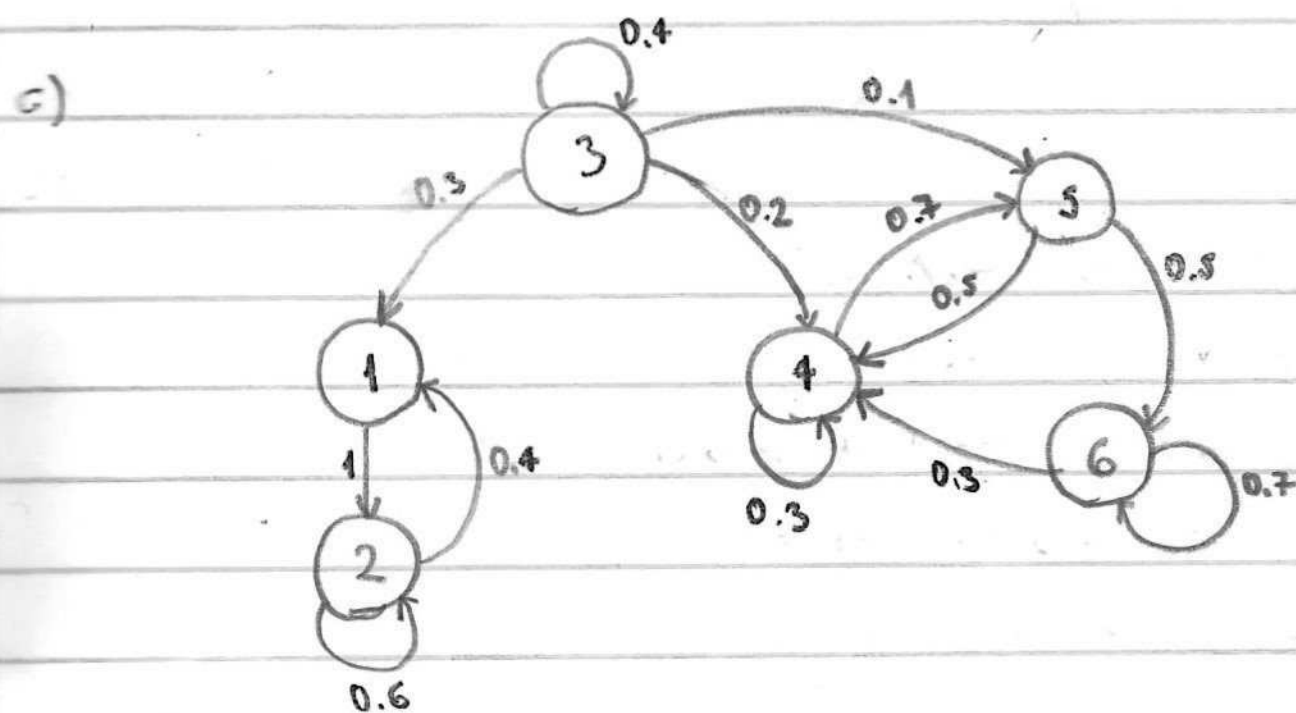
C_3 - zatvorena klasa sa apsorbujućim stanjem.

Ovde je lako intuitivno zaključiti: povratnost/prolaznost, ali nije teško ni formalno doći do toga:

$$P^n = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{4^n} & 1 - \frac{1}{4^n} \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n p_{ii}(n) = +\infty \quad i \in \{1, 2, 4\}$$

$$\sum_{i=1}^n p_{33}(n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{4^n} < +\infty$$



Klase komunikacije:

$C_1 = \{1, 2\}$ - zatvorena klasa, sva stanja su povratna, aperiodična

$C_2 = \{3\}$ - otvorena klasa, stanje je prolazno, aperiodično

$C_3 = \{4, 5, 6\}$ - zatvorena klasa, sva stanja su povratna, aperiodična

Kada lanac uđe u stanje 3, ostaje u njemu konačno dugo,

nakon čega „bira“ da li će da ode u C_1 ili C_3 ,
u kojoj ostaje zauvek.

	0	1	2	3	
23.	0	0	0	1	Ako pri polasku, npr. od kuće, ima k kišobrana, znači da ima u tom trenutku $3-k$ na poslu. Pri sledećem polasku (sa posla) će imati ili $s-k$ ili $3-k+1$ kišobrana
$P =$	1	0	0	0.75	
	2	0	0.75	0.25	
	3	0.75	0.25	0	

* Lanac je nesvodljiv (sva stanja komuniciraju međusobno),
ima konačno mnogo stanja $\Rightarrow$ sva su povratna.

a) $p_{00}(1) = 0$ nije pala kiša
 $p_{00}(2) = 0.75$ $0 \rightarrow 3 \rightarrow 0$
 $p_{00}(3) = 0$
 $p_{00}(4) > 0$ $0 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 0$
 $p_{00}(5) = 0$
 $p_{00}(6) > 0$ $0 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 0$
 $p_{00}(7) > 0$ $0 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 0$

$N_{2D}(2,7) = 1 \Rightarrow d_0 = 1 \Rightarrow 0$ je aperiodično stanje $\Rightarrow$ lanac je aperiodičan

Lakše: $p_{22} > 0 \Rightarrow d_2 = 1 \Rightarrow 2$ je aperiodično stanje $\Rightarrow 0$ i 2 komuniciraju $\Rightarrow 0$ je aperiodično stanje.

* Činjenica da je 2 očigledno aperiodično smo i iskoristili da izmenimo rutu od 6 koraka tako da ima 7 .

Posledica: Postoji granično, pa i jedinstvena stacionarna raspodela.

b) $\bar{J}_i = [\bar{J}_{i0} \quad \bar{J}_{i1} \quad \bar{J}_{i2} \quad \bar{J}_{i3}]$ stacionarna raspodela

$\bar{J}_{i0}$ - procenat polazaka sa i kišobrana na raspolaganju (dugoročni)

$$\bar{J}_i \cdot P = \bar{J}_i:$$

$$0.75 \bar{J}_{i3} = \bar{J}_{i0}$$

$$0.75 \bar{J}_{i2} + 0.25 \bar{J}_{i3} = \bar{J}_{i1}$$

$$0.75 \bar{J}_{i1} + 0.25 \bar{J}_{i2} = \bar{J}_{i2}$$

$$\bar{J}_{i0} + 0.25 \bar{J}_{i1} = \bar{J}_{i3}$$

$$\Rightarrow \bar{J}_{i0} = \frac{3}{4} \bar{J}_{i3}, \quad \bar{J}_{i1} = \bar{J}_{i3}, \quad \bar{J}_{i2} = \bar{J}_{i3}$$

$$\sum_{i=0}^3 \bar{J}_{i0} = 1 \Rightarrow 3 \frac{3}{4} \bar{J}_{i3} = 1 \Rightarrow \bar{J}_{i1} = \bar{J}_{i2} = \bar{J}_{i3} = \frac{4}{15}, \quad \bar{J}_{i0} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Šena pokisne kada ima 0 kišobrana i kada pada kiša, tj. u $\bar{J}_{i0} \cdot 0.25 = \frac{1}{20} = \boxed{5\% \text{ dana}}$

c) $M_{10} = ?$

$$M_{10} = 1 + p_{10} \cdot 0 + p_{11} \cdot M_{10} + p_{12} \cdot M_{20} + p_{13} \cdot M_{30}$$

↑

Lanac mora da napravi jedan korak, a dalje delimo na slučajeve u zavisnosti od toga gde je otišao.

$$\left. \begin{aligned} M_{10} &= 1 + 0.75 \cdot M_{20} + 0.25 M_{30} \\ M_{20} &= 1 + 0.75 M_{10} + 0.25 M_{20} \\ M_{30} &= 1 + 0.25 M_{10} \end{aligned} \right\} \Rightarrow M_{10} = 1 + \frac{3}{4} \left(\frac{1 + \frac{3}{4} M_{10}}{\frac{3}{4}} \right) + \frac{1}{4} (1 + 0.25 M_{10})$$

$$M_{10} = 1 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} M_{10} + \frac{1}{16} M_{10}$$

$$\frac{3}{16} M_{10} = \frac{9}{4}$$

$$\boxed{M_{10} = 12}$$

* Intuicija iz $\bar{J} \cdot P = \bar{J}$

Svaki put kada lanac uđe u stanje 3, ima 0.75 verovatnoću da uđe u stanje 0, i to je jedini način da uđe u stanje 0. Dugoročno, to znači da će lanac u stanju 0 provesti 75% vremena kog provodi u stanju 3. Odatle:
 $0.75 \bar{J}_3 = \bar{J}_0$

Slično, svaki put kad lanac uđe u stanje 2 ima 75% šanse da uđe u stanje 1, i svaki put kada uđe u stanje 3 ima 25% da uđe u stanje 1. Odatle:
 $0.75 \bar{J}_2 + 0.25 \bar{J}_3 = \bar{J}_1$

Ovako mogu i ostale formule da se dobije, i uopštavanjem dobijamo $\bar{J} \cdot P = \bar{J}$.