

Пример. Нека је X посматрано обележје, чија густина расподеле вероватноћа припада фамилији $\mathcal{P} = \{f(x, \theta) : \theta \in \mathbb{R}\}$ допустивих густина расподеле, где је $f(x, \theta)$ дато са

$$f(x, \theta) = \frac{e^{-(x-\theta)}}{(1 + e^{-(x-\theta)})^2}, \quad \text{за } x \in \mathbb{R}. \quad [\text{логистичка расподела}]$$

Методом максималне веродостојности одредити оцену непознатог параметра θ на основу простог случајног узорка $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ из обележја X .

Решење.

Функција веродостојности L дата је са

$$L(\theta) = e^{n\theta} \cdot e^{-\sum_{j=1}^n x_j} \cdot \prod_{j=1}^n \left(1 + e^{-(x_j - \theta)}\right)^{-2},$$

а њен природни логаритам – функција l са

$$l(\theta) = n\theta - n\bar{x}_n - 2 \sum_{j=1}^n \ln \left(1 + e^{-(x_j - \theta)}\right).$$

Функција l је диференцијабилна (по θ) и њен први извод једнак је

$$l'(\theta) = n - 2 \sum_{j=1}^n \frac{e^{-(x_j - \theta)}}{1 + e^{-(x_j - \theta)}}.$$

Његовим изједначавањем са нулом добија се једначина веродостојности, која, након незнатног сређивања, има облик

$$\sum_{j=1}^n \frac{e^{-(x_j - \theta)}}{1 + e^{-(x_j - \theta)}} = \frac{n}{2}.$$

Иако се ова једначина не може поједноставити, лако се показује да она има јединствено решење. Наиме, извод (по θ) леве стране једначине своди се на

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{j=1}^n \frac{e^{-(x_j - \theta)}}{1 + e^{-(x_j - \theta)}} = \sum_{j=1}^n \frac{e^{-(x_j - \theta)}}{(1 + e^{-(x_j - \theta)})^2},$$

па је, према томе, функција са леве стране једначине веродостојности строго растућа функција од θ . Ова функција конвергира 0, при $\theta \rightarrow -\infty$, односно ка n , при $\theta \rightarrow +\infty$. Дакле, једначина веродостојности има јединствено решење. Други извод функције l је строго негативна функција за свако $\theta \in \mathbb{R}$, па је то јединствено решење заиста тачка у којој функција l (а самим тим и L) достиже максимум.

Решење (које ће представљати оцену ММВ) не може се задати аналитички, па се за одређивање (приближне) оцене користе нумеричке методе – овде метод тангенте (*Newton-Raphson*-ов метод).

Дакле, решава се једначина $l'(\theta) = 0$. Нека је задато (или некако изабрано) почетно решење $\hat{\theta}^{(0)}$. Идеја метода тангенте је да се повуче тангента на криву функције $l'(\theta)$ у тачки $(\hat{\theta}^{(0)}, l'(\hat{\theta}^{(0)}))$ и дефинише ново решење $\hat{\theta}^{(1)}$ као апсциса пресечне тачке тангенте и x -осе. Алгебарски се лако добија формула

$$\hat{\theta}^{(1)} = \hat{\theta}^{(0)} - \frac{l'(\hat{\theta}^{(0)})}{l''(\hat{\theta}^{(0)})}.$$

Затим се $\hat{\theta}^{(0)}$ замењује новим решењем $\hat{\theta}^{(1)}$ и понавља описани поступак чиме се добија решење $\hat{\theta}^{(2)}$. Метод је итеративан, тако да се поступак индуктивно примењује на свако следеће решење све до конвергенције. Брзина конвергенције метода је (барем) квадратна.

С обзиром да је мат. очекивање обележја X једнако θ , природно је као почетно решење узети баш $\hat{\theta}^{(0)} = \bar{X}_n$.

У наставку је дата функција у статистичком софтверу R, која рачуна приближну вредност оцене непознатог параметра θ на основу реализованог узорка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ из обележја X , са задатом тачношћу.

```
mmvlogistic = function(x, theta0=mean(x), numstp=100, eps=.0001){
  n = length(x)
  numfin = numstp
  small = 1.0*10^(-8)
  ic = 0
  istop = 0
  while(istop == 0){
    ic = ic + 1
    expx = exp(-(x - theta0))
    lprime = n-2*sum(expx/(1+expx))
    ldprime = -2*sum(expx/(1+expx)^2)
    theta1 = theta0 - (lprime/ldprime)
    check = abs(theta0-theta1)/abs(theta0 + small)
    if(check < eps){istop=1}
    theta0 = theta1
  }
  list(theta1=theta1, check=check, realnumstps=ic)
}
```

△