

Пример. Нека је X посматрано обележје, чија расподела вероватноћа припада фамилији $\mathcal{P} = \{\mathcal{U}[0, \theta] : \theta > 0\}$ допустивих расподела. Као оцене непознатог параметра θ предложене су следеће статистике (формиране на основу простог случајног узорка $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ из обележја X):

$$\begin{aligned} T_n &= 2\bar{X}_n & U_n &= (n+1)X_{(1)} \\ V_n &= \frac{n+1}{n}X_{(n)} & W_n &= X_{(1)} + X_{(n)}. \end{aligned}$$

Испитати својства наведених оцена. Извршити упоређивање оцена.

Решење.

За оцену T_n важи:

$$ET_n = 2E\bar{X}_n = 2EX = \theta, \quad DT_n = 4D\bar{X}_n = 4 \cdot \frac{DX}{n} = \frac{\theta^2}{3n}.$$

За случајан низ (X_k) независних копија случајне величине X ($X_k \stackrel{D}{=} X$, за свако k) важи Колмогоровљев јаки закон великих бројева ($EX_1 = EX = \theta/2 < +\infty$), тј.

$$\bar{X}_n \xrightarrow{\text{c.c.}} \frac{\theta}{2}, \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

па, стога, важи и

$$T_n \xrightarrow{\text{c.c.}} \theta, \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

На основу свега наведеног закључује се да је **оцена T_n центрирана и (јако) постојана оцена параметра θ .**

За анализирање својстава оцене U_n корисно је прво одредити функцију $F_{X_{(1)}}$ и густину $f_{X_{(1)}}$ расподеле случајне величине $X_{(1)} = \min_{1 \leq k \leq n} X_k$:

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x) &= 1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^n, \text{ за } x \in [0, \theta] & [\text{предавања - питање 13}] \\ f_{X_{(1)}}(x) &= \frac{n}{\theta} \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^{n-1}, \text{ за } x \in [0, \theta]. \end{aligned}$$

Тако се добија

$$\begin{aligned} EU_n &= (n+1)EX_{(1)} = (n+1) \cdot \frac{\theta}{n+1} = \theta, \\ DU_n &= (n+1)^2 DX_{(1)} = (n+1)^2 (E(X_{(1)}^2) - (EX_{(1)})^2) = (n+1)^2 \cdot \left(\frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \frac{\theta^2}{(n+1)^2} \right) = \frac{n}{n+2} \theta^2. \end{aligned}$$

Такође је, за $\varepsilon > 0$ фиксирано,

$$P\{|V_n - \theta| > \varepsilon\} = 1 - P\left\{\frac{\theta - \varepsilon}{n+1} \leq X_{(1)} \leq \frac{\theta + \varepsilon}{n+1}\right\} = 1 - F_{X_{(1)}}\left(\frac{\theta + \varepsilon}{n+1}\right) + F_{X_{(1)}}\left(\frac{\theta - \varepsilon}{n+1}\right),$$

што се, у случају $0 < \varepsilon < \theta$, (након сређивања) своди на

$$P\{|U_n - \theta| > \varepsilon\} = 1 + \left(1 - \frac{1 + \frac{\varepsilon}{\theta}}{n+1}\right)^n - \left(1 - \frac{1 - \frac{\varepsilon}{\theta}}{n+1}\right)^n \not\rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

На основу свега наведеног закључује се да је **оцена U_n центрирана, али није постојана оцена параметра θ .**

За анализирање својстава оцене V_n корисно је прво одредити функцију $F_{X_{(n)}}$ и густину $f_{X_{(n)}}$ расподеле случајне величине $X_{(n)} = \max_{1 \leq k \leq n} X_k$:

$$F_{X_{(n)}}(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n, \text{ за } x \in [0, \theta] \quad [\text{предавања - питање 13}]$$

$$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{nx^{n-1}}{\theta^n}, \text{ за } x \in [0, \theta].$$

Тако се добија

$$EV_n = \frac{n+1}{n} EX_{(n)} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \theta = \theta,$$

$$DV_n = \frac{(n+1)^2}{n^2} DX_{(n)} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \left(\frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n+1)^2} \right) = \frac{1}{n(n+2)} \theta^2.$$

Такође је, за $\varepsilon > 0$ фиксирано,

$$P\{|V_n - \theta| > \varepsilon\} = 1 - F_{X_{(n)}}\left(\frac{n}{n+1}(\theta + \varepsilon)\right) + F_{X_{(n)}}\left(\frac{n}{n+1}(\theta - \varepsilon)\right)$$

$$= \begin{cases} 1 - \left(\frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\theta}\right)\right)^n + \left(\frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)\right)^n, & \text{за } 0 < \varepsilon \leq \frac{\theta}{n} \\ \left(\frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)\right)^n, & \text{за } \frac{\theta}{n} \leq \varepsilon \leq \theta \\ 0, & \text{за } \varepsilon \geq \theta \end{cases}$$

$$\rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Одатле, такође, једноставно следи да је за свако $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P\{|V_n - \theta| > \varepsilon\} < +\infty,$$

јер се за довољно велико n ($n \geq \theta/\varepsilon$, у нетривијалном случају када је $\varepsilon < \theta$) сабирак у горњој суми може мајорирати са $\left(1 - \frac{\varepsilon}{\theta}\right)^n$, чиме се дати ред мајорира конвергентним геометријским редом.

Према томе

$$V_n \xrightarrow{\text{c.c.}} \theta, \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad [\text{предавања - питање 4}]$$

На основу свега наведеног закључује се да је **оцена V_n центрирана и (јачо) постојана оцена параметра θ .**

За анализирање својстава оцене W_n корисно је прво одредити њену функцију G и густину g . Прво се одређује заједничка функција и густина расподеле дводимензионог случајног вектора $(X_{(1)}, X_{(n)})$:

$$F_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(x, y) = P\{X_{(1)} \leq x, X_{(n)} \leq y\} = P\{X_{(n)} \leq y\} - P\{X_{(1)} > x, X_{(n)} \leq y\} \quad [\text{ф-ла потпуне вероватноће}]$$

$$= F_{X_{(n)}}(y) - P\{x < X_1 \leq y, x < X_2 \leq y, \dots, x < X_n \leq y\} = \left(\frac{y}{\theta}\right)^n - \left(\frac{y-x}{\theta}\right)^n$$

$$f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(x, y) = \frac{n(n-1)}{\theta^2} \left(\frac{y-x}{\theta}\right)^{n-2}$$

на носачу расподеле $\{(x, y) : 0 \leq x < y \leq \theta\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Даље је

$$G(w) = P\{W_n \leq w\} = P\{X_{(1)} + X_{(n)} \leq w\} = \iint_S f_{(X_{(1)}, X_{(n)})}(x, y) dx dy$$

при чему је $S \subseteq \mathbb{R}^2$ област у првом квадранту одређена условима: $0 \leq x < y \leq \theta$ и $x + y \leq w$, где је $w \in [0, 2\theta]$. Решавањем интеграла добија се

$$G(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{w}{\theta}\right)^n, & \text{за } 0 < w \leq \theta \\ 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \frac{w}{\theta}\right)^n, & \text{за } \theta \leq w < 2\theta \end{cases},$$

односно

$$g(y) = \begin{cases} \frac{nw^{n-1}}{2\theta^n}, & \text{за } 0 < w \leq \theta \\ \frac{n}{2\theta} \cdot \left(2 - \frac{w}{\theta}\right)^{n-1}, & \text{за } \theta \leq w < 2\theta \end{cases}.$$

Ту је

$$EW_n = EX_{(1)} + EX_{(n)} = \theta, \\ DW_n = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\theta^2 \rightarrow 0, \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

На основу свега наведеног закључује се да је **оцена W_n центрирана и постојана оцена параметра θ** [предавања - питање 19].

Оцена V_n је боља од осталих оцена, јер има строго најмању дисперзију за свако $\theta \in \Theta = (0, +\infty)$.

НАПОМЕНА: Свака оцена облика $\alpha T_n + (1 - \alpha)V_n$, где је $\alpha \in [0, 1]$, представља **центрирану и јако постојану оцену параметра θ** . $\triangle$