

28. Нејман-Пирсонова лема.

Нека је X посматрано обележје са теоријском функцијом расподеле $F(x, \theta)$, где θ припада параметарском простору $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$. Тестира се проста нулта хипотеза $H_0(\theta = \theta_0)$ против просте алтернативне хипотезе $H_1(\theta = \theta_1)$ на основу простог случајног узорка $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ из обележја X , за задати праг значајности α .

Нека је обележје X апсолутно-непрекидног типа, такво да је носач расподеле читав скуп реалних бројева. Уводе се ознаке: $F_0(x) := F(x, \theta_0)$, $F_1(x) := F(x, \theta_1)$ за функције расподеле и $f_0(x)$, $f_1(x)$, редом, за одговарајуће густине расподеле.

Нека је

$$K(\mathbf{X}) = \frac{L(\theta_1; \mathbf{X})}{L(\theta_0; \mathbf{X})} = \prod_{j=1}^n \frac{f_1(X_j)}{f_0(X_j)}$$

количник функција веродостојности.

Дефинише се функција $h : [0, +\infty) \rightarrow [0, 1]$ једнакошћу

$$h(C) = P_{\theta_0}\{K(\mathbf{X}) \geq C\}.$$

Одмах се може установити да је функција h опадајућа и да је $h(0) = 1$.

Уводи се ознака: $A_C := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) : K(\mathbf{x}) \geq C\} \subseteq \mathbb{R}^n$, за свако $C \in [0, +\infty)$.

Тада је

$$\begin{aligned} 1 \geq P_{\theta_1}\{K(\mathbf{X}) \geq C\} &= \int_{A_C} L(\theta_1; \mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{A_C} \prod_{j=1}^n f_1(x_j) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &\geq \int_{A_C} C \prod_{j=1}^n f_0(x_j) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= C \int_{A_C} L(\theta_0; \mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= C P_{\theta_0}\{K(\mathbf{X}) \geq C\} = C h(C). \end{aligned}$$

Одатле следи: $h(C) \leq 1/C$ и $\lim_{C \rightarrow +\infty} h(C) = 0$.

Ако је h непрекидна функција, онда за произвољно $\alpha \in (0, 1)$ постоји број C такав да важи $h(C) = \alpha$.

Лема. Нека су F_0 и F_1 апсолутно-непрекидне функције расподеле са густинама расподеле f_0 и f_1 , редом, и нека за дато $\alpha \in (0, 1)$ постоји број C такав да важи

$$h(C) = P_{\theta_0}\{K(\mathbf{X}) \geq C\} = \alpha.$$

Тада постоји оптимална критична област величине α за тестирање просте хипотезе $H_0(\theta = \theta_0)$ против просте алтернативе $H_1(\theta = \theta_1)$ и дата је са

$$W_o = \{\mathbf{x} : K(\mathbf{x}) \geq C\}.$$

НАПОМЕНА: Аналогно тврђење може се формулисати и у случају када је посматрано обележје X дискретног типа.

Пример. Нека је X посматрано обележје, чија расподела вероватноћа припада фамилији $\mathcal{P} = \{B(1, p) : p \in (0, 1)\}$ допустивих расподела. Тестира се хипотеза $H_0(p = 0.5)$ против хипотезе $H_1(p = p_1)$, где је $p_1 > 0.5$ позната вредност. За задати праг значајности α одредити оптималну критичну област.

Решење.

Овде, за $p \in (0, 1)$, важи:

$$L(p; \mathbf{X}) = \prod_{j=1}^n p^{X_j} (1-p)^{1-X_j} = p^{\sum_{j=1}^n X_j} (1-p)^{n - \sum_{j=1}^n X_j},$$

па је количник функција веродостојности дат са

$$K(\mathbf{X}) = \frac{p_1^{\sum_{j=1}^n X_j} (1-p_1)^{n - \sum_{j=1}^n X_j}}{0.5^n} = \left(\frac{p_1}{1-p_1} \right)^{\sum_{j=1}^n X_j} \cdot (2(1-p_1))^n.$$

Како је $p_1 > 0.5$ функција $K(\mathbf{X})$ је растућа функција од $S_n := \sum_{j=1}^n X_j$ – броја успеха у n независних експеримената у Бернулијевој шеми. Према томе, одбацавање нулте хипотезе за велике вредности $K(\mathbf{X})$ своди се на одбацавање нулте хипотезе за велике вредности S_n . На основу Нејман-Пирсонове леме оптимална критична област је таква да би хипотезу H_0 требало одбацити ако је $S_n > C$, где је C константа. Она се одређује тако да се обезбеди праг значајности α (тј. величина ове критичне области требало би да буде **највише** α ; наиме, када тест-статистика има дискретну расподелу вероватноћа, праг значајности се обично не може тачно достићи, па се онда захтева да не буде већи од задате вредности): при тачној нултој хипотези важи $S_n \in \mathcal{B}(n, 0.5)$, тако да би тражено C требало да буде квантил реда $1 - \alpha$ биномне $\mathcal{B}(n, 0.5)$ расподеле.

Нумеричка илустрација.

Нека је $n = 5$ и $p_1 = 0.75$. Дата је следећа табела

s	0	1	2	3	4	5
$P_{0.5}\{S_n = s\}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$
$P_{0.75}\{S_n = s\}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{243}{1024}$
$K(\mathbf{x})$	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{81}{32}$	$\frac{243}{32}$

Нека је $\alpha = 1/32$. Ако је $W_1 = \{s : s = 0\}$ или $W_2 = \{s : s = 5\}$ важиће

$$P_{0.5}\{S_n \in W_1\} = \frac{1}{32} = P_{0.5}\{S_n \in W_2\},$$

па су и W_1 и W_2 критичне области величине **тачно** α . Нема ниједног додатног скупа $W_3 \subseteq \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ тако да важи $P_{0.5}\{S_n \in W_3\} = 1/32$. При томе је

$$P_{0.75}\{S_n \in W_1\} = \frac{1}{1024} < \frac{243}{1024} = P_{0.75}\{S_n \in W_2\},$$

одакле се види да је W_2 оптимална критична област величине α . Ова област је добијена укључивањем тачке (тачака, у општем случају) у којима је $P_{0.5}\{S_n = s\}$ **мала** у поређењу са $P_{0.75}\{S_n = s\}$ (заправо је вероватноћа одбацавања H_0 у ситуацији када је H_1 тачна много већа од вероватноће одбацавања H_0 у ситуацији када је H_0 тачна, што је пожељно).

Нека је сада $\alpha = 6/32$. Тада су $W_1 = \{0, 1\}$, $W_2 = \{0, 4\}$, $W_3 = \{1, 5\}$, $W_4 = \{4, 5\}$ критичне области величине **тачно** α . Директним рачунањем моћи теста за сваку од ових критичних области добија се да је W_4 оптимална критична област величине α . Ово у потпуности одсликава чињеницу да количник ф-ја веродостојности узима две најмање вредности у случају када је $s = \sum_{j=1}^5 x_j$ ($\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$) једнако 4, односно 5. △