

ЈАКИ ЗАКОН ВЕЛИКИХ БРОЈЕВА ЦЕНТРАЛНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

26. МАРТ 2018.

Јаки закон великих бројева

► Пример 1

Изводи се случајан експеримент бацања хомогене (нумерисане) коцкице за игру. При сваком бацању коцкице региструје се број који је пао на њеној горњој страни.

Нека је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ резултата бацања. Ово је низ независних, једнако расподељених случајних величина, при чему:

$$X_1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

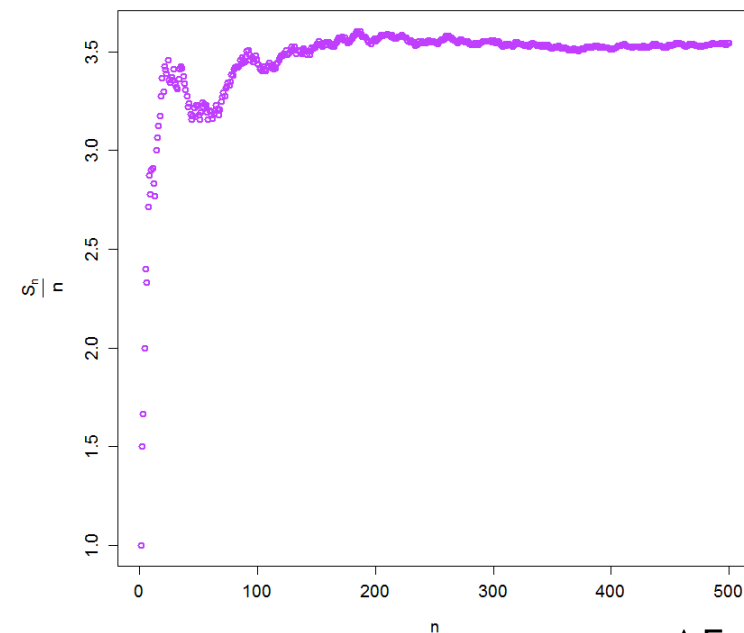
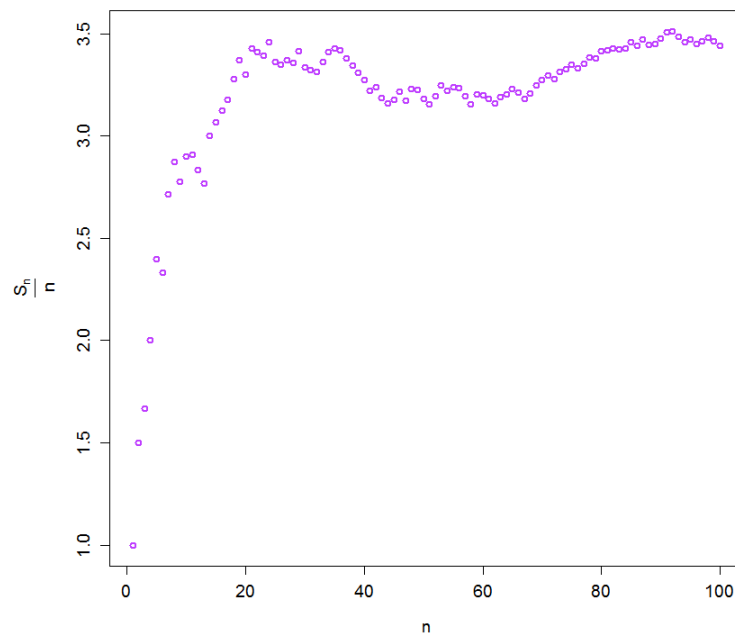
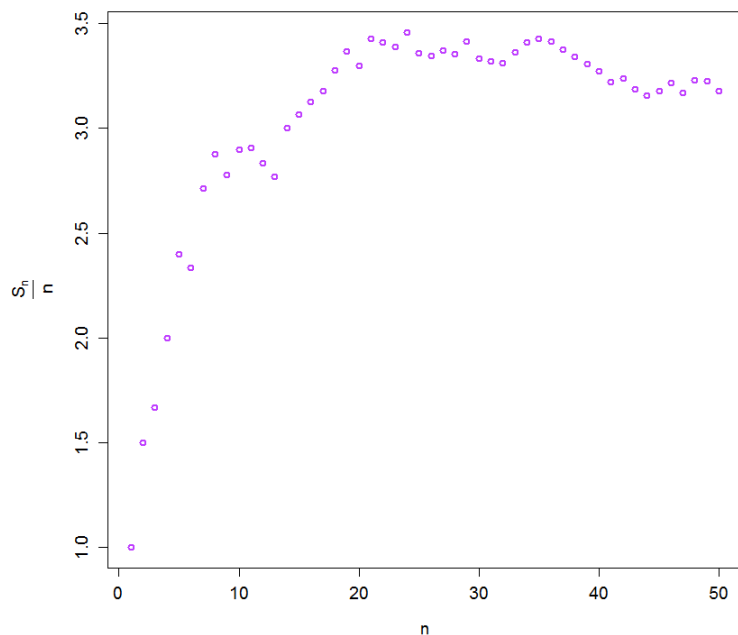
Генерисање (псеудо)случајног броја x из расподеле случајне величине X_1 :

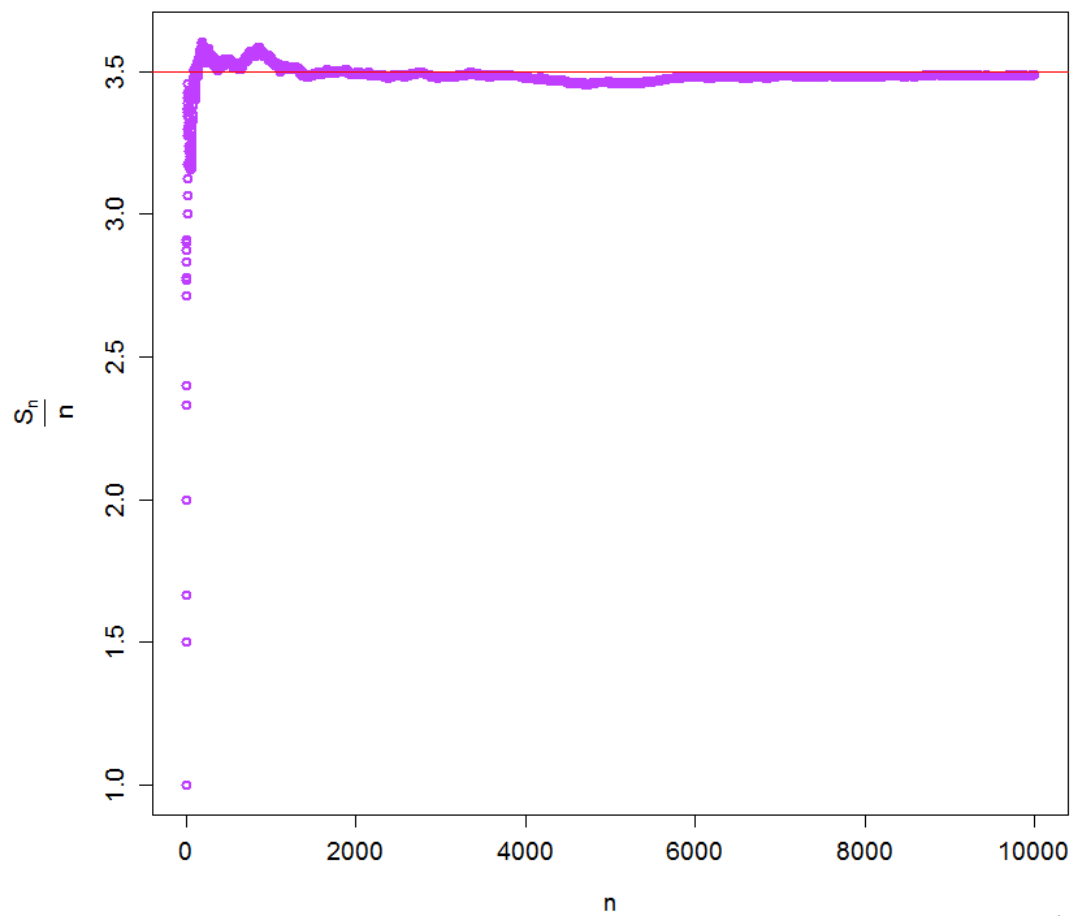
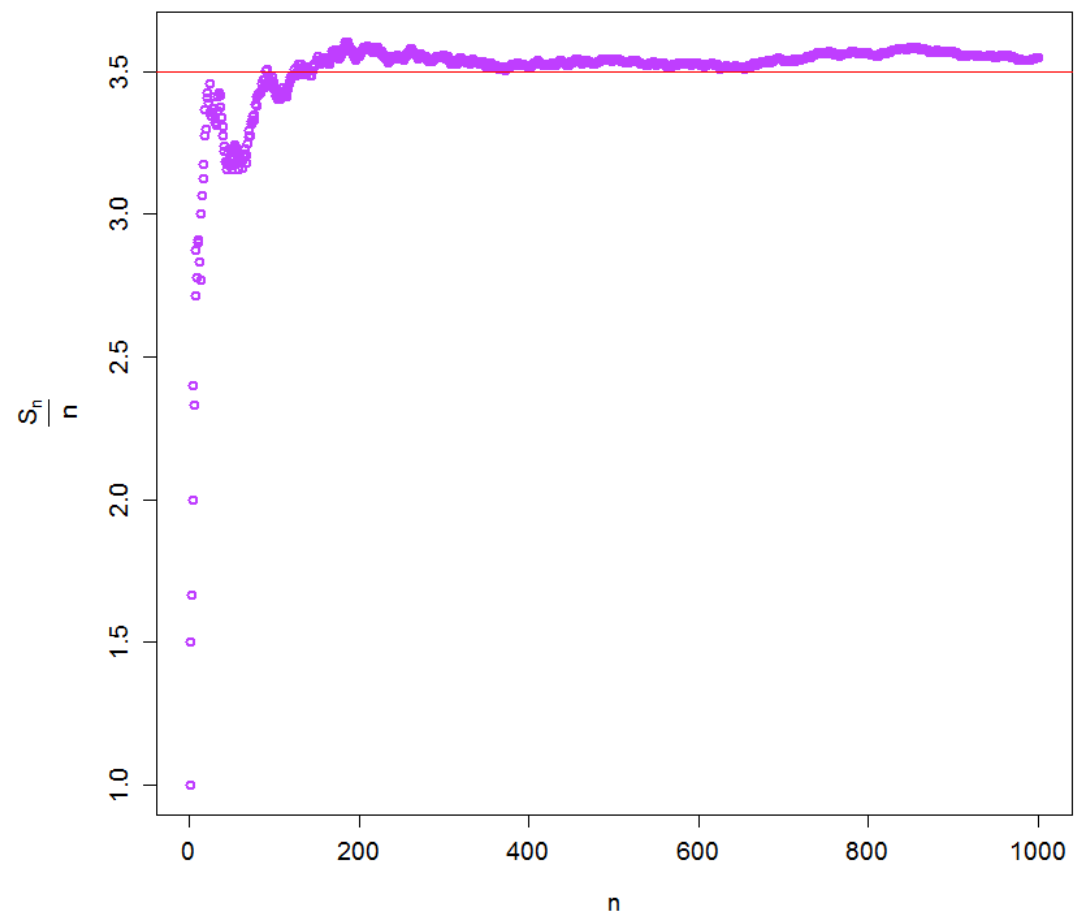
нека је u (псеудо)случајан број из равномерне расподеле на инт. $(0, 1)$; генерисан је број $x = k$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ако је $\frac{k-1}{6} \leq u < \frac{k}{6}$.

За низ (X_n) важи јаки закон великих бројева, тј:

$$\frac{S_n}{n} := \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow 3.5, n \rightarrow +\infty,$$

са вероватноћом 1.





► Пример 2

Нека је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ независних, једнако расподељених случајних величина, при чему X_1 има експоненцијалну $\varepsilon(1)$ расподелу, са густином расподеле:

$$f(x) = e^{-x}, x \geq 0.$$

Генерисање (псеудо)случајног броја x из расподеле случајне величине X_1 :

нека је u (псеудо)случајан број из равномерне расподеле на инт. $(0, 1)$; онда је

$$x = -\ln u$$

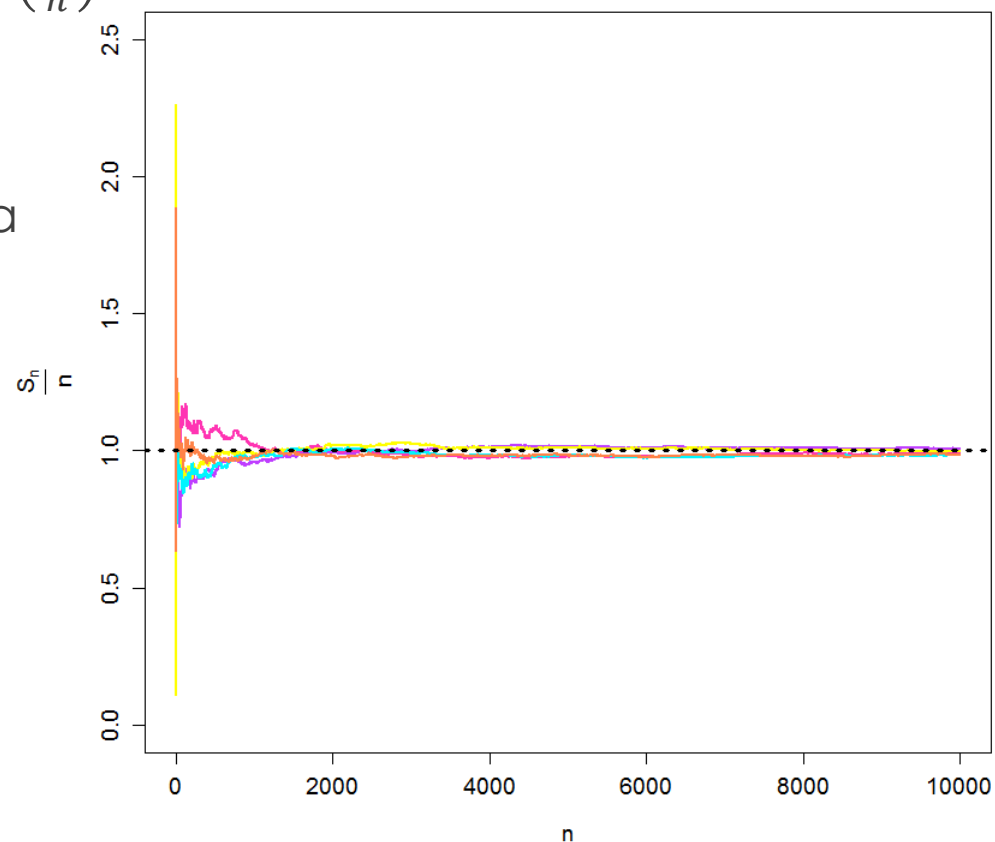
(примењује се метод инверзне функције).

За низ (X_n) , са вероватноћом 1, важи једнакост:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = 1.$$

На слици је приказано пет реализација низа $\left(\frac{S_n}{n}\right)$, где је $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$, закључно са 10000-тим чланом.

На основу важења јаког закона великих бројева за низ (X_n) , скоро свака реализација низа $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ имаће исто овакво асимптотско понашање, при $n \rightarrow +\infty$.



► Пример 3

Нека је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ независних, једнако расподељених случајних величина, при чему X_1 има (стандардну) Кошијеву расподелу, са густином расподеле:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}.$$

Од интереса је питање понашања (са вероватноћом 1) оцене другог момента Кошијеве расподеле.

Генерисање (псеудо)случајног броја x из расподеле случајне величине X_1^2 :

нека је u (псеудо)случајан број из равномерне расподеле на инт. $(0, 1)$; онда је

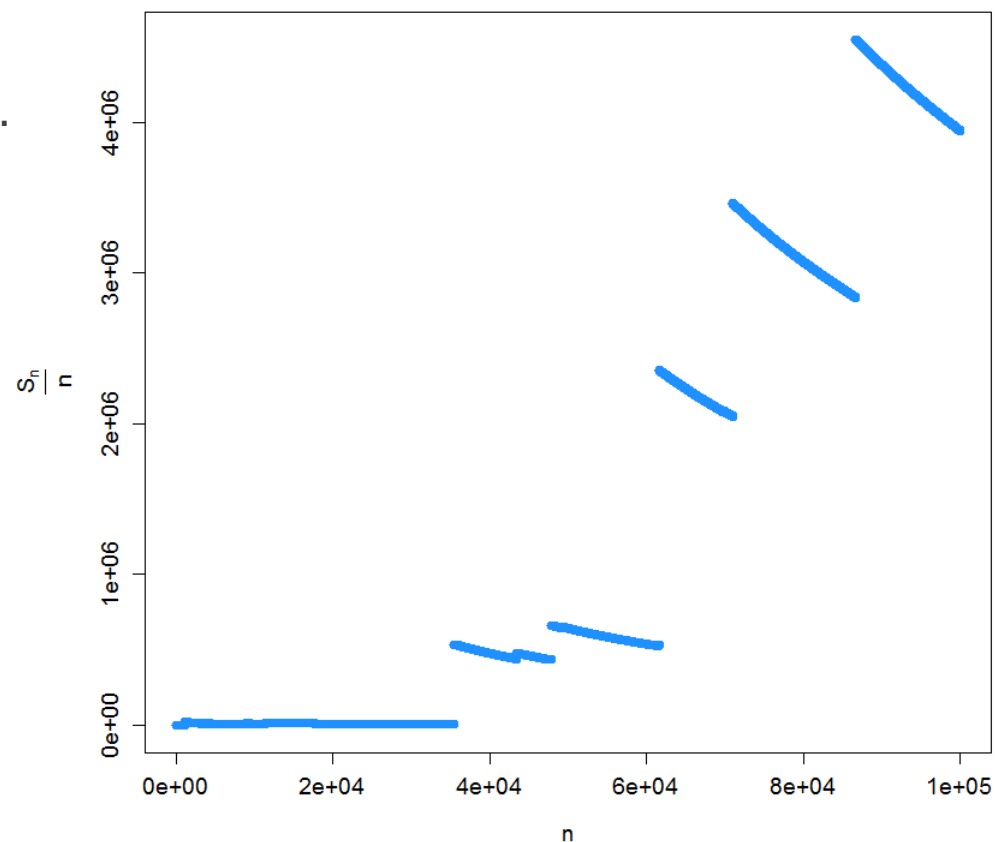
$$x = \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \cdot u \right) \right)^2$$

(примењује се метод инверзне функције).

За низ (X_n^2) , са вероватноћом 1, важи једнакост:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{n} = +\infty.$$

$$\left(\frac{S_n}{n} := \frac{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}{n}\right)$$



Централна гранична теорема

► Пример 4

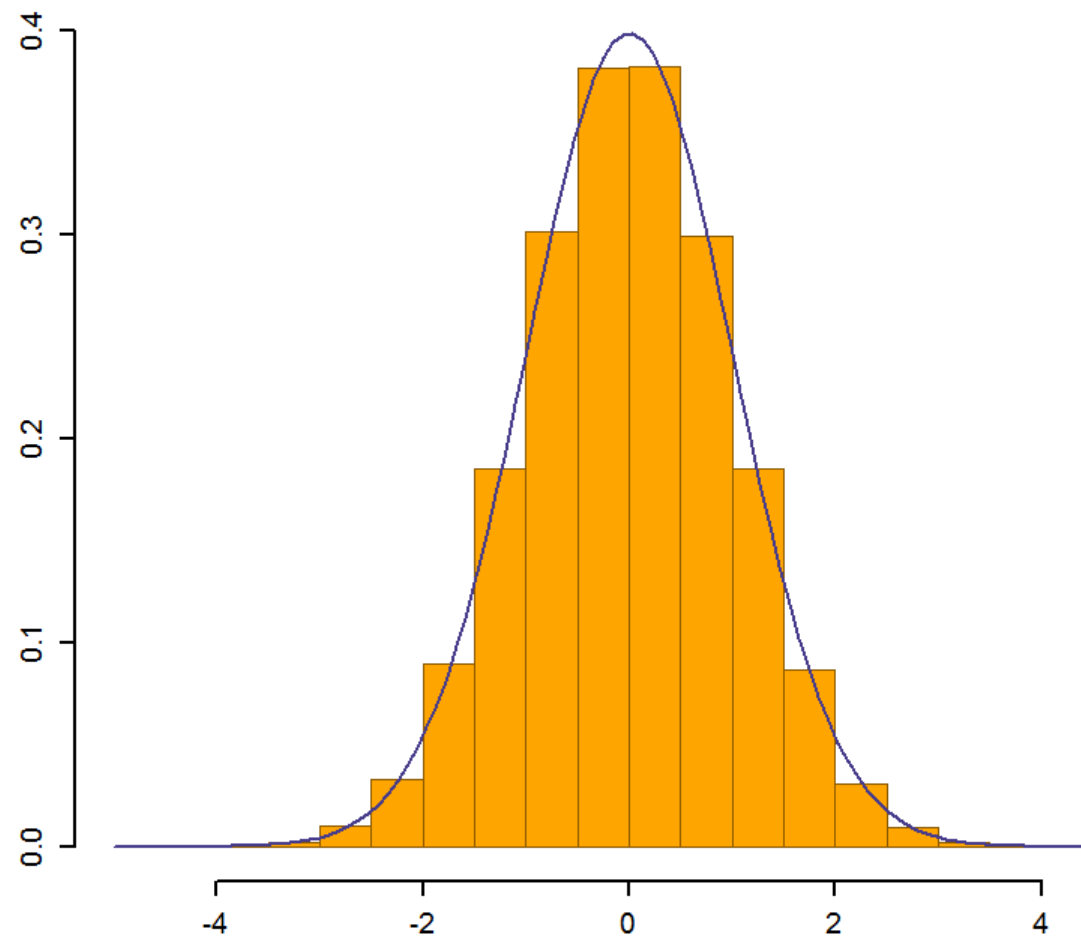
Нека је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ независних, једнако расподељених случајних величина, при чему X_1 има равномерну $\mathcal{U}(0,1)$ расподелу.

Генерисање (псеудо)случајног броја из стандардне нормалне расподеле:

За коначно али велико n , на основу важења централне граничне теореме за низ (X_n) , закључује се да важи апроксимација (у смислу расподеле):

$$\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n - n/2}{\sqrt{n/12}} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Histogram simuliranih parcijalnih suma, nakon normiranja



► Пример 5

Генерише се прост случајан узорак $(X_1, X_2, \dots, X_{100})$ обима 100 из експоненцијалне $\varepsilon\left(\frac{2}{3}\right)$ расподеле. Овај експеримент понавља се 1000 пута.

Нека случајна величина A_{100} представља аритметичку средину сл. величина $X_1, X_2, \dots, X_{100}$, а сл. величина Z њену нормалну апроксимацију (на основу важења централне граничне теореме).

Дефинишу се функције:

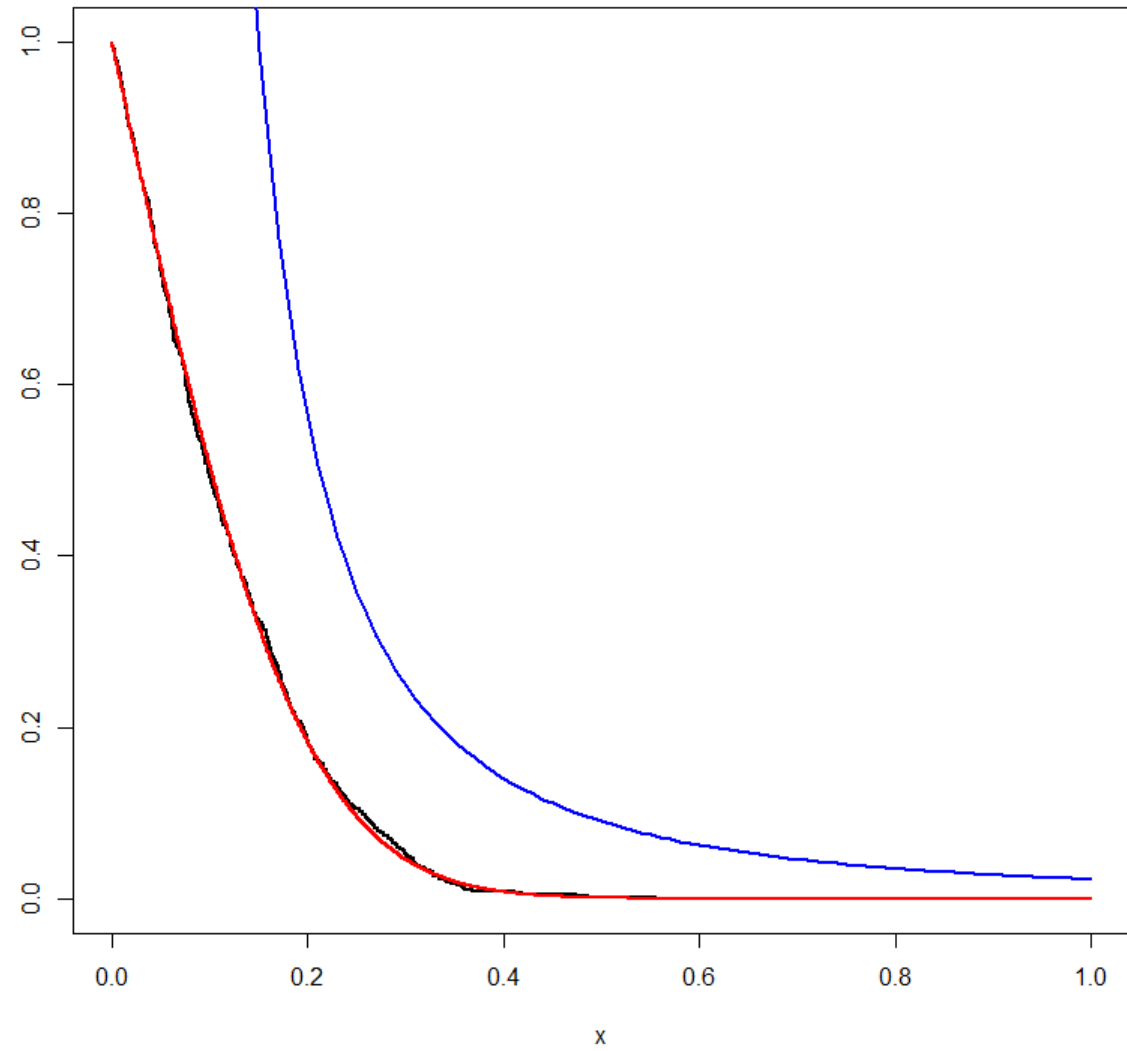
$$G(x) = P\{|A_{100} - 1.5| \geq x\}$$

= релативна учестаност догађаја $|a_{100} - 1.5| \geq x$ у 1000 понављања експеримента

$$H(x) = P\{|Z - 1.5| \geq x\}$$

$$C(x) = \frac{9}{400x^2}.$$

Графици ових функција на инт. $(0, 1)$ приказани су, редом, црном, црвеном, плавом бојом.



Λιτεράτυρα

- ▶ “Simulation (5th edition)”

Sheldon **Ross** 2013.

- ▶ “Probability and Statistics for Computer Scientists”

Michael **Baron** 2014.