

**Лема.** Нека је  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  прост случајан узорак обима  $n$  за обележје  $X \in N(m, \sigma^2)$ . Узорачка средина  $\bar{X}_n$  независна је од случајних величина  $X_j - \bar{X}_n$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

**Доказ.**

Приметити да важе следеће једнакости:

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{x_j - m}{\sigma} \right)^2 = \sum_{j=1}^n \left( \frac{(x_j - \bar{x}_n) + (\bar{x}_n - m)}{\sigma} \right)^2 = \sum_{j=1}^n \left( \frac{x_j - \bar{x}_n}{\sigma} \right)^2 + \frac{n(\bar{x}_n - m)^2}{\sigma^2}.$$

Заједничка густина  $f$  сл. вектора  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  дата је са:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^n (x_j - m)^2 \right\},$$

што се, коришћењем горњег идентитета, своди на:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_n)^2 + n(\bar{x}_n - m)^2 \right) \right\},$$

за  $x_j \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Примењује се следећа трансформација сл. величина  $X_j$ , тј. уводе се нове сл. величине  $Y_j$  дате са:

$$Y_1 = \bar{X}_n, \quad Y_j = X_j - \bar{X}_n, \quad \text{за } 2 \leq j \leq n.$$

Инверзна трансформација одређена је формулама:

$$X_1 = Y_1 - \sum_{j=2}^n Y_j, \quad X_j = Y_1 + Y_j, \quad \text{за } 2 \leq j \leq n.$$

Лако се показује да је апсолутна вредност јакобијана инверзне трансформације једнака  $n$ , па је заједничка густина  $g$  сл. вектора  $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$  дата са [уџбеник Младеновић - густина расподеле  $\Phi$ -је сл. вектора]:

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{n}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \left( -\sum_{j=2}^n y_j \right)^2 + \sum_{j=2}^n y_j^2 + n(y_1 - m)^2 \right) \right\},$$

за  $y_j \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Даље је:

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, \dots, y_n) &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{n(y_1 - m)^2}{2\sigma^2} \right\} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{2\pi\sigma^2})^{n-1}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \left( -\sum_{j=2}^n y_j \right)^2 + \sum_{j=2}^n y_j^2 \right) \right\} \\ &= g_{Y_1}(y_1) \cdot g_{Y_2, Y_3, \dots, Y_n}(y_2, y_3, \dots, y_n), \quad \text{за } \forall (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

чиме је показано да су  $Y_1$  и  $Y_j$ ,  $2 \leq j \leq n$ , независне.

Још остаје да се покаже да су  $Y_1 = \bar{X}_n$  и  $X_1 - \bar{X}_n$  независне. Међутим, то лако следи, јер је  $X_1 - \bar{X}_n = -\sum_{j=2}^n (X_j - \bar{X}_n)$ , тј.  $X_1 - \bar{X}_n$  је функција само од сл. величина  $Y_j$ ,  $2 \leq j \leq n$ , за

које је показано да су независне од  $Y_1$ . ■

**Последица.** Узорачка средина и узорачка дисперзија за прост случајан узорак из нормалне расподеле су независне случајне величине.