Теорија узорака

18. фебруар ’20.

ЛГлаваш

(Прост) случајан узорак

- Код (простог) случајног узорковања ('simple random sampling'):

  јединица посматрања = јединица узорковања.

  Нека је дата популација са N јединица, које су у оквиру за одабир узорка означене бројевима из скупа $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$ и нека је Y обележје од интереса. Бира се узорак обима n.

- Може бити:
  - без понављања ('without replacement') ☝ скраћеница: SRSWOR
  - са понављањем ('with replacement') ☝ скраћеница: SRSWR

ЛГлаваш

SRSWOR

- Представља један од најједноставнијих и најстаријих метода одабира узорка
- Расподела вероватноћа $p(\cdot)$ на колекцији свих узорака $s \subset \Omega$ дата је са:

$$p(s) = \begin{cases} \binom{N}{n}^{-1}, & \text{ако је обим узорка } s \text{ једнак } n \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

  Дакле, овде се сваки од $\binom{N}{n}$ могућих подскупова скупа Ω кардиналности n са подједнаком (позитивном) вероватноћом може одабрати као узорак
- Поменути план обично се у пракси имплементира једним од следећа два еквивалентна поступка:
  - одабир узорка врши се кроз n извлачења („корака“) на случајан начин, при чему је у сваком кораку вероватноћа извлачења било које од јединица, које у ранијим корацима нису одабране у узорак, иста
  - одабир узорка врши се кроз низ независних извлачења на случајан начин из целе популације, при чему је у сваком кораку вероватноћа извлачења било које од јединица иста $\left(= \frac{1}{N}\right)$, уз одбацивање јединица раније одабраних у узорак и понављање корака све док се не добије узорак обима n

☝ Узорак одабран на описани начин може се приказати и као уређен низ $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ ознака јединица које су се нашле у узорку (j_k је ознака k-те јединице задржане у узорку).

Под узорком се, такође, подразумева и припадни низ $(y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_n})$ вредности посматраног обележја Y регистрованих на одабраним јединицама.

Парови (j_k, y_{j_k}), $k = \overline{1,n}$, представљају податке добијене у истраживању.

ЛГлаваш

SRSWR

- Одабир узорка врши се кроз n независних извлачења на случајан начин, и то увек из комплетне популације, при чему је у сваком кораку вероватноћа извлачења било које од јединица иста и једнака $\frac{1}{N}$
- Расподела вероватноћа $p(\cdot)$ на колекцији свих узорака $s \in \Omega^n$ као уређених низова дужине n са дозвољеним понављањем елемената дата је са:

$$p(s) = N^{-n}$$

ИЗВЛАЧЕЊЕ ЈЕДИНИЦЕ НА СЛУЧАЈАН НАЧИН

- Случајан одабир јединице (из популације у узорак) врши се коришћењем случајних и псеудослучајних бројева.
- Случајни бројеви обично се добијају помоћу тзв. физичких генератора (TRNG – 'true random number generator')
  - у макро свету: бацање фер новчића / коцкица, случајан избор карте из шпила / куглице из кутије, рулет итд.
  - у микро свету: природни феномени за које важе законитости квантне механике, шум итд.

  Они су садржани у тзв. таблицама случајних бројева.
- Псеудослучајни бројеви се добијају помоћу тзв. програмских генератора (PRNG – 'pseudorandom number generator')
  То су рачунарски програми који користе известан алгоритам за добијање низа бројева чија својства, у одређеној мери, опонашају својства низа случајних бројева.

Нови појмови

- Индикатор укључења ('inclusion indicator'):

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{ако је јединица означена са } k \text{ одабрана у узорак} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

- Вероватноћа укључења ('inclusion probability') првог, односно другог, реда:
  π_k – вероватноћа да јединица означена са k буде одабрана у узорак
  π_{kl} – вероватноћа да и јединица означена са k и јединица означена са l буду одабране у узорак

- „Тежина“ узорковања ('sampling weight') – реципрочна вредност очекиваног броја појављивања јединице означене са k у узорку (што се, код узорка без понављања, своди на реципрочну вредност вероватноће укључења првог реда π_k)
  може се интерпретирати као број јединица у популацији које репрезентује јединица означена са k

ЛГлаваш

SRSWOR VS SRSWR

SRSWOR	SRSWR
Вероватноћа укључења првог реда: $\pi_k = \frac{n}{N}$ за свако k	Вероватноћа укључења првог реда: $\pi_k = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$ за свако k
Вероватноћа да ће јединица означена са k бити одабрана у узорак у j-том кораку: $\frac{1}{N}$ ☝ то би био први, а уједно и једини, корак у коме је она извучена	Вероватноћа да ће јединица означена са k бити одабрана у узорак у j-том кораку: $\frac{1}{N}$
	Вероватноћа да ће јединица означена са k бити одабрана у узорак више од једанпут: $1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}\left(\frac{N-1-n}{N}\right)$
Очекивани број појављивања јединице означене са k у узорку: π_k	Очекивани број појављивања јединице означене са k у узорку: $\frac{n}{N}$
Вероватноћа укључења другог реда: $\pi_{kl} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$ за $k \neq l$	Вероватноћа укључења другог реда: $\pi_{kl} = 1 - 2\left(\frac{N-1}{N}\right)^n + \left(\frac{N-2}{N}\right)^n$ за $k \neq l$

Приступи приликом закључивања

приступ заснован на методу одабира узорка ('design-based approach')	**приступ заснован на моделу ('model-based approach')**
популација је фиксирана: вредности $y_1, y_2, \dots, y_N$ обележја Y на јединицима у популацији сматрају се фиксираним (детерминистичким), али непознатим вредностима теорија вероватноћа појављује се само у вези са случајношћу приликом одабира узорка, а која је планирана кроз наметнути метод одабира узорка	популација је стохастичка: вредности $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$ обележја Y на јединицима у популацији сматрају се случајним величинама модел популације дат је заједничком расподелом вероватноћа сл. вектора $(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$, у којој учествује бар једна непозната константа (параметар) конкретан низ вредности $(y_1, y_2, \dots, y_N)$ обележја Y на јединицима у популацији представља само једну реализацију сл. вектора $(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$

Приступи приликом закључивања
(наставак)

приступ заснован на методу одабира узорка ('design-based approach')	**приступ заснован на моделу ('model-based approach')**
узорачка расподела статистике је дискретна расподела вероватноћа: ако је $\hat{\theta} = \hat{\theta}(S)$ статистика, онда важи $$P\{\hat{\theta} = m\} = \sum_{s:\hat{\theta}(s)=m} p(s)$$ а њено математичко очекивање и дисперзија израчунавају се по формулама: $$E\hat{\theta} = \sum_{m} mP\{\hat{\theta} = m\} = \sum_{s} \hat{\theta}(s) \cdot p(s)$$ $$D\hat{\theta} = \sum_{s} \left(\hat{\theta}(s) - E\hat{\theta}\right)^2 \cdot p(s)$$	узорачка расподела статистике је нека једнодимензиона расподела вероватноћа одређена заједничком расподелом вероватноћа претпостављеног модела популације
непристрасност тачкасте оцене $\hat{\theta}$ у односу на метод одабира узорка	непристрасност тачкасте оцене $\hat{\theta}$ у односу на модел

ЛГлаваш

SRSWOR VS SRSWR
тачкасте оцене

Нека је са $\mathcal{S}$ означен (прост) случајан узорак обима n. Кључни резултати у вези непознатом популацијском средњом вредношћу m_Y, када је приступ заснован на методу SRSWOR, односно SRSWR, одабира узорка, дати су у следећој табели:

	SRSWOR	**SRSWR**	**SRSWR** (узимају се у обзир само различите јединице)
тачкаста оцена $\hat{m}_Y$	$\frac{1}{n}\sum_{k\in\mathcal{S}} y_k$	$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_{j_k}$	$\frac{1}{n_D}\sum_{k} y_{(k)}$
$E\hat{m}_Y$	m_Y	m_Y	m_Y
$D\hat{m}_Y$	$\frac{\sigma^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)$	$\frac{N-1}{N}\cdot\frac{\sigma^2}{n}$	$\sum_{k=1}^{N-1}\frac{k^{n-1}}{N^n}\cdot\sigma^2$
тачкаста оцена $D\hat{m}_Y$	$\frac{\bar{S}^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)$	$\frac{\bar{S}^2}{n}$	

n_D је ефективан обим узорка, тј. обим редукованог узорка $(y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(n_D)})$ у коме су изостављена евентуална понављања јединица из оригиналног узорка

☝ може се показати да је $\bar{S}^2$ непристрасна оцена σ^2

где је σ^2 (непозната) популацијска дисперзија, а $\bar{S}^2$ (позната) узорачка дисперзија.

ЛГлаваш

Нови појмови

- Стопа одабира узорка, или тзв. разломак узорковања ('sampling fraction'), је однос обима узорка и обима популације, тј. количник $\frac{n}{N}$
- Вредност $1 - \frac{n}{N}$ назива се фактор корекције због коначности популације ('finite-population correction factor')

☝ У пракси се често занемарује када стопа одабира узорка не прелази 5%, а у многим случајевима и када је до 10%

- Када су познати математичко очекивање и дисперзија тачкасте оцене $\hat{\theta}$ може се одредити коефицијент варијације оцене $\hat{\theta}$, дефинисан са:

$$CV(\hat{\theta}) := \frac{SE(\hat{\theta})}{E\hat{\theta}}$$

и који представља релативну меру варијабилности оцене

ЛГлаваш

SRSW(O)R – тачкасте оцене

Нека је са $\mathcal{S}$ означен случајан узорак без понављања обима n. Када је приступ заснован на моделу, врло једноставан модел популације био би модел у коме су случајне величине $Y_1, Y_2, \ldots, Y_N$ независне и имају исту расподелу вероватноћа као посматрано обележје Y. Кључни резултати у вези непознатом средњом вредношћу $m_Y := EY$ обележја Y, дати су у следећој табели:

тачкаста оцена $\hat{m}_Y$	$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k\in\mathcal{S}} Y_k$
$E\hat{m}_Y$	m_Y
$D\hat{m}_Y$	$\frac{\sigma_Y^2}{n}$
тачкаста оцена $D\hat{m}_Y$	$\frac{\bar{S}^2}{n}$

иста оцена може се користити за оцењивање, односно предвиђање вредности сл. величине

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_k$$

Средње квадратна грешка предвиђања једнака је:

$$\frac{\sigma_Y^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)$$

а њена оцена:

$$\frac{\bar{S}^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)$$

где је $\sigma_Y^2 := DY$ дисперзија обележја Y, а $\bar{S}^2$ (позната) узорачка дисперзија.

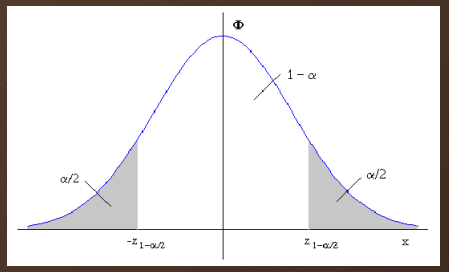
SRSW(O)R – интервалне оцене

Претпоставља се модел популације са претходног слајда, при чему обележје Y има коначну средњу вредност и дисперзију.

- Ако је обим узорка n „довољно велики“ (у пракси је довољно већ $n \geq 30$), на основу важења Централне граничне теореме, апроксимативни $100 \cdot (1-\alpha)\%$ (двострани) интервал поверења за непознату средњу вредност m_Y обележја Y, дат је са:

σ_Y^2 се оцењује са $\bar{S}^2$

$$\left[\bar{Y} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_Y^2}{n}}, \bar{Y} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_Y^2}{n}}\right]$$



где је $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ вредност $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-квантила стандардне нормалне расподеле

- Ако је обим узорка n мањи од 30, горња апроксимација не важи, па се примењује егзактан метод, који на основу претпоставки модела даје тачне интервале поверења са нивоом поверења не мањим од $1-\alpha$

SRSW(O)R – интервалне оцене
(наставак)

Специјално, ако обележје Y има нормалну $\mathcal{N}(m_Y, \sigma_Y^2)$ расподелу тачан $100 \cdot (1-\alpha)\%$ (двострани) интервал поверења за непознату средњу вредност m_Y:

- када је σ_Y^2 познато дат је са:

$$\left[\bar{Y} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma_Y^2/n}, \bar{Y} + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sigma_Y^2/n}\right]$$

  где је $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ вредност $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-квантила стандардне нормалне расподеле

- када је σ_Y^2 непознато дат је са:

$$\left[\bar{Y} - t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\bar{S}^2/n}, \bar{Y} + t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\bar{S}^2/n}\right]$$

  где је $t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}$ вредност $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$-квантила Студентове расподеле са $(n-1)$ степени слободе

☝ За велики обим узорка из обележја са нормалном расподелом практично нема разлике када је дисперзија обележја Y позната и када није, јер се тада Студентова расподела добро апроксимира $\mathcal{N}(0,1)$ расподелом

SRSWOR  SRSWR
интервалне оцене

Нека је са $\mathcal{S}$ означен (прост) случајан узорак довољно великог обима n. Кључни асимптотски резултати у вези са интервалном оценом непознате популацијске средње вредности m_Y, када је приступ заснован на методу SRSWOR, односно SRSWR одабира узорка, дати су у следећој табели:

апроксимативни
$100 \cdot (1-\alpha)\%$ **двострани интервал поверења**

SRSWR	$\left[\hat{m}_Y - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{S}^2}{n}}, \hat{m}_Y + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{S}^2}{n}}\right]$
SRSWOR	$\left[\hat{m}_Y - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{S}^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}, \hat{m}_Y + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\bar{S}^2}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)}\right]$

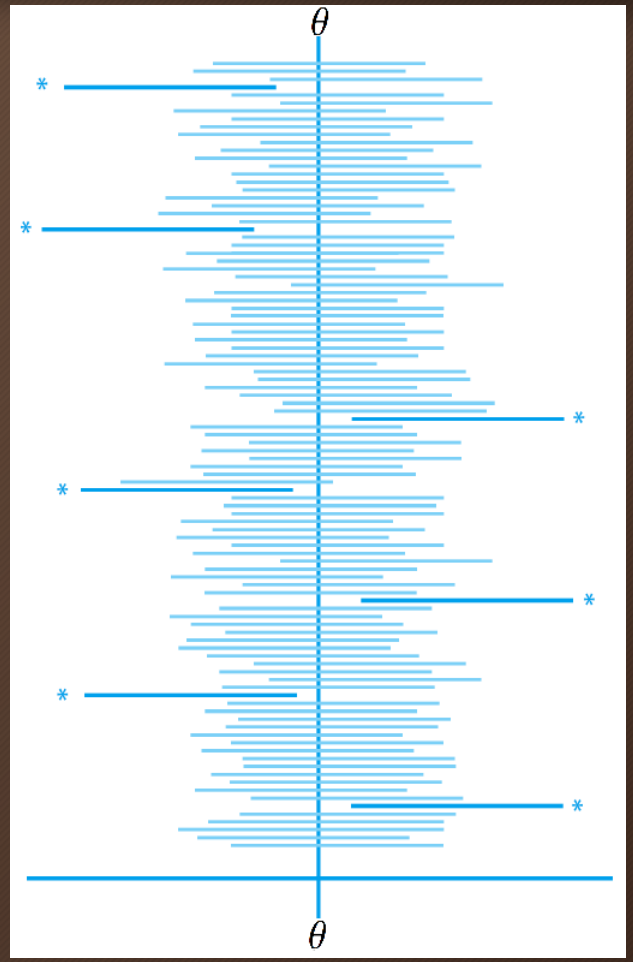
код случајног узорка са понављањем чланови узорка су реализације независних и једнако расподељених случајних величина, па у основи лежи важење стандардне Централне граничне теореме (тј. узорачка средина која се појављује као тачкаста оцена за m_Y има приближно нормалну расподелу за довољно велико n)

код случајног узорка без понављања чланови узорка су реализације случајних величина које нису независне, па се формулише специјална верзија Централне граничне теореме која се може применити у случају оваквог узорковања из коначне популације када су n, N и $N-n$ „довољно велики“; увођење појма „суперпопулације“

ЛГлаваш

Интерпретација нивоа поверења

Интерпретација интервала поверења, односно одговарајућег нивоа поверења $(1-\alpha)$, разликује се у зависности од приступа приликом закључивања



ЛГлаваш

Одређивање обима узорка

Једно је од првих питања при планирању истраживања, а одговор на њега није увек једноставан. Суштински, ради се о одлучивању о томе колика је (узорачка) грешка прихватљива приликом закључивања, при чему се обично мора уравнотежити тачност закључивања са трошковима истраживања

- Нека је $\hat{\theta}$ тачкаста оцена непознате популацијске вредности θ. Након прецизирања апсолутне (дозвољене) грешке ('margin of error') Δ за задати ниво поверења $1-\alpha$, питање се своди на одређивање вредности n тако да важи

$$P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|>\Delta\right\}<\alpha$$

Нпр. ако је $\hat{\theta}$ непристрасна, нормално расподељена оцена параметра θ онда

$$P\left\{\frac{\left|\hat{\theta}-\theta\right|}{\sqrt{D\hat{\theta}}}>z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}=P\left\{\left|\hat{\theta}-\theta\right|>z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{D\hat{\theta}}\right\}=\alpha$$

па како дисперзија оцене $\hat{\theta}$ опада са обимом узорка n, онда ће горња неједнакост бити задовољена ако се одабере довољно велико n тако да важи $z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{D\hat{\theta}}\leq\Delta$

SRSWOR  SRSWR
обим узорка

Најједноставнија једначина за одређивање обима узорка за оцењивање непознате популацијске средње вредности m_Y, тако да се постигне апсолутна грешка не већа од Δ са поверењем $1-\alpha$, може се добити на основу апроксимативних интервала поверења:

формула за одређивање обима узорка

SRSWR

$$n_0 = \left(\frac{\sigma z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\Delta}\right)^2$$

SRSWOR

$$n = \frac{1}{\frac{1}{n_0} + \frac{1}{N}}$$

σ^2 је, у општем случају, непозната популацијска дисперзија;
она се мора оценити на неки начин:

- спровођењем пилот истраживања на узорку „малог“ обима
- коришћењем ранијих истраживања или постојећих података у литератури
- ако не долази у обзир ништа од претходно наведеног - „погађањем“)

Одређивање обима узорка
(наставак)

Поред описаног критеријума одређивања обима узорка задавањем апсолутне грешке оцене, постоје и други критеријуми и то:

- задавањем ширине интервала поверења
- задавањем горње границе дисперзије / стандардне грешке оцене
- задавањем релативне грешке оцене

Нека је $\hat{\theta}$ тачкаста оцена непознате популацијске вредности θ. Након прецизирања релативне грешке ρ за задати ниво поверења $1-\alpha$, питање се се своди на одређивање вредности n тако да важи

$$P\left\{\frac{|\hat{\theta}-\theta|}{\theta} > \rho\right\} < \alpha$$

- задавањем коефицијента варијације оцене
- задавањем трошкова узорковања

ЛГлаваш

☝ Резултати који се тичу непознатог популацијског тотала τ_Y у потпуности су аналогни приказаним резултатима у вези са непознатом популацијском средњом вредношћу m_Y

(лако се добијају једни из других коришћењем везе: $\tau_Y = Nm_Y$)