

1. Нека је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ независних случајних величина, при чему случајна величина X_n има густину расподеле

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{n+1}{n} \\ ne^{-nx+n+1}, & x \geq \frac{n+1}{n}. \end{cases}$$

Методом карактеристичних функција испитати конвергенцију у расподели низа (X_n) , а затим испитати и остале врсте конвергенције тог низа.

2. (а) Нека случајан вектор (X, Y) има заједничку густину расподеле f дату са $f(x, y) = cx(y-x)e^{-y}$, за $0 \leq x \leq y < +\infty$. Одредити c , а затим и условно математичко очекивање $E(Y|X)$ и, помоћу тога, математичко очекивање EY .

- (б) Показати да важи:

$$X_n \xrightarrow{P} X, \text{ при } n \rightarrow +\infty \iff E\left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right) \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

3. (а) Нека $X_n \xrightarrow{P} a$, при $n \rightarrow +\infty$, где је $a \in \mathbb{R}$ константа, и нека је $g(\cdot)$ реална функција, непрекидна у тачки a . Тада важи: $g(X_n) \xrightarrow{P} g(a)$, при $n \rightarrow +\infty$. Доказати.

- (б) Нека је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ независних случајних величина са истом расподелом, математичким очекивањем једнаким 0 и дисперзијом једнаком 1. Нека је

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}}.$$

Ако $Z_n \xrightarrow{D} Z$, при $n \rightarrow +\infty$, одредити коју расподелу има случајна величина Z .

4. ПОПРАВНИ ЗАДАТАК: Нека су X_1, X_2 и X_3 независне случајне величине са двојном експоненцијалном расподелом (густина расподеле је $f(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$). Нека су Y_1, Y_2 и Y_3 случајне величине задате са

$$Y_1 = 2X_1 + X_2 + X_3, \quad Y_2 = X_1 + 2X_2 + X_3, \quad Y_3 = X_1 + X_2 + 2X_3.$$

Одредити густину расподеле случајног вектора (Y_1, Y_2, Y_3) .

1. Нека је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ независних случајних величина, при чему случајна величина X_n има густину расподеле

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{n+1}{n} \\ ne^{-nx+n+1}, & x \geq \frac{n+1}{n}. \end{cases}$$

Методом карактеристичних функција испитати конвергенцију у расподели низа (X_n) , а затим испитати и остале врсте конвергенције тог низа.

2. (а) Нека случајан вектор (X, Y) има заједничку густину расподеле f дату са $f(x, y) = cx(y-x)e^{-y}$, за $0 \leq x \leq y < +\infty$. Одредити c , а затим и условно математичко очекивање $E(Y|X)$ и, помоћу тога, математичко очекивање EY .

- (б) Показати да важи:

$$X_n \xrightarrow{P} X, \text{ при } n \rightarrow +\infty \iff E\left(\frac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|}\right) \rightarrow 0, \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

3. (а) Нека $X_n \xrightarrow{P} a$, при $n \rightarrow +\infty$, где је $a \in \mathbb{R}$ константа, и нека је $g(\cdot)$ реална функција, непрекидна у тачки a . Тада важи: $g(X_n) \xrightarrow{P} g(a)$, при $n \rightarrow +\infty$. Доказати.

- (б) Нека је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ независних случајних величина са истом расподелом, математичким очекивањем једнаким 0 и дисперзијом једнаком 1. Нека је

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}}.$$

Ако $Z_n \xrightarrow{D} Z$, при $n \rightarrow +\infty$, одредити коју расподелу има случајна величина Z .

4. ПОПРАВНИ ЗАДАТАК: Нека су X_1, X_2 и X_3 независне случајне величине са двојном експоненцијалном расподелом (густина расподеле је $f(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}, x \in \mathbb{R}$). Нека су Y_1, Y_2 и Y_3 случајне величине задате са

$$Y_1 = 2X_1 + X_2 + X_3, \quad Y_2 = X_1 + 2X_2 + X_3, \quad Y_3 = X_1 + X_2 + 2X_3.$$

Одредити густину расподеле случајног вектора (Y_1, Y_2, Y_3) .