

ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА

Други колоквијум - 10. фебруар 2013.

1. Нека је $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ простор елементарних догађаја неког случајног експеримента и нека је $P(\omega_k) = \frac{6}{\pi^2 k^2}$, $k \in \mathbb{N}$. Низ случајних величина $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дефинисан је са:

$$X_n(\omega_k) = k, n = k; X_n(\omega_k) = 0, n \neq k$$

а низ $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ са:

$$Y_n = 1 - \frac{X_n}{n^2}.$$

Испитати све четири врсте конвергенција низа $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. а) Нека су $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низови случајних величина, $a \in \mathbb{R}$, тако да важи $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{P} a$. Доказати да важи:

$$X_n Y_n \xrightarrow{P} 0, \text{ за } a = 0$$

$$X_n Y_n \xrightarrow{D} aX, \text{ за } a \neq 0$$

(Може се, без доказа, користити тврђење: Ако $|X_n - Y_n| \xrightarrow{P} 0$ и $Y_n \xrightarrow{D} Y$, онда $X_n \xrightarrow{D} Y$, при $n \rightarrow +\infty$.)

- б) Нека је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ независних случајних величина са $U(-0.5, 0.5)$ расподелом. Нека је $Z_k = \sqrt{k} \cdot \frac{X_1 X_2 X_3 + X_4 X_5 X_6 + \dots + X_{3k-2} X_{3k-1} X_{3k}}{X_1^4 + X_2^4 + \dots + X_k^4}$, $k \in \mathbb{N}$. Коју расподелу има случајна величина Z , ако $Z_k \xrightarrow{D} Z$, при $k \rightarrow +\infty$?

3. Дат је низ независних случајних величина $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, при чему је $P\{X_n = \pm n^{-\frac{\alpha}{2}}\} = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Проверавањем неког од довољних услова показати да, ако је $\alpha \leq 1$, за низ (X_n) важи ЦГТ.

4. ПОПРАВНИ ЗАДАТАК: Нека су X_1, X_2, X_3 независне случајне величине са стандардном нормалном расподелом, а

$$Y_1 = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}, Y_2 = \frac{X_1 + X_2 - 2X_3}{\sqrt{6}}, Y_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}}.$$

Одредити густину расподеле случајног вектора (Y_1, Y_2, Y_3) .

ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА

Други колоквијум - 10. фебруар 2013.

1. Нека је $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ простор елементарних догађаја неког случајног експеримента и нека је $P(\omega_k) = \frac{6}{\pi^2 k^2}$, $k \in \mathbb{N}$. Низ случајних величина $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дефинисан је са:

$$X_n(\omega_k) = k, n = k; X_n(\omega_k) = 0, n \neq k$$

а низ $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ са:

$$Y_n = 1 - \frac{X_n}{n^2}.$$

Испитати све четири врсте конвергенција низа $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. а) Нека су $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низови случајних величина, $a \in \mathbb{R}$, тако да важи $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{P} a$. Доказати да важи:

$$X_n Y_n \xrightarrow{P} 0, \text{ за } a = 0$$

$$X_n Y_n \xrightarrow{D} aX, \text{ за } a \neq 0$$

(Може се, без доказа, користити тврђење: Ако $|X_n - Y_n| \xrightarrow{P} 0$ и $Y_n \xrightarrow{D} Y$, онда $X_n \xrightarrow{D} Y$, при $n \rightarrow +\infty$.)

- б) Нека је $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ низ независних случајних величина са $U(-0.5, 0.5)$ расподелом. Нека је $Z_k = \sqrt{k} \cdot \frac{X_1 X_2 X_3 + X_4 X_5 X_6 + \dots + X_{3k-2} X_{3k-1} X_{3k}}{X_1^4 + X_2^4 + \dots + X_k^4}$, $k \in \mathbb{N}$. Коју расподелу има случајна величина Z , ако $Z_k \xrightarrow{D} Z$, при $k \rightarrow +\infty$?

3. Дат је низ независних случајних величина $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, при чему је $P\{X_n = \pm n^{-\frac{\alpha}{2}}\} = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Проверавањем неког од довољних услова показати да, ако је $\alpha \leq 1$, за низ (X_n) важи ЦГТ.

4. ПОПРАВНИ ЗАДАТАК: Нека су X_1, X_2, X_3 независне случајне величине са стандардном нормалном расподелом, а

$$Y_1 = \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}}, Y_2 = \frac{X_1 + X_2 - 2X_3}{\sqrt{6}}, Y_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{\sqrt{3}}.$$

Одредити густину расподеле случајног вектора (Y_1, Y_2, Y_3) .