

ТЕОРИЈА ВЕРОВАТНОЋА

Други колоквијум - 18. фебруар 2012.

1. Нека случајна величина $X \in U[0,1]$, и нека је дат низ случајних величина $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дефинисан са $X_n = X + I\{X < \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Испитати све конвергенције низа (X_n) .
2. а) Нека су $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дати низови случајних величина и $a \in \mathbb{R}$, при чему важи: $X_n \xrightarrow{D} X$, $Y_n \xrightarrow{P} a$, при $n \rightarrow +\infty$. Доказати да важи:
$$X_n Y_n \xrightarrow{P} 0, \text{ за } a = 0$$
$$X_n Y_n \xrightarrow{D} aX, \text{ за } a \neq 0$$

(Може се, без доказа, користити тврђење: Ако $|X_n - Y_n| \xrightarrow{P} 0$ и $Y_n \xrightarrow{D} Y$, онда $X_n \xrightarrow{D} Y$, при $n \rightarrow +\infty$.)
б) Нека су $X_1, X_2, \dots$, независне, једнако расподељене случајне величине, при чему је $EX_i = 0$, $DX_i = 1$, $EX_i^4 < +\infty$, за свако $i \in \mathbb{N}$. Нека је $Z_n = \sqrt{n} \cdot \frac{X_1 + X_3 + \dots + X_{2n-1}}{2(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{2n}^2)}$, $n \in \mathbb{N}$. Коју расподелу има случајна величина Z , ако $Z_n \xrightarrow{D} Z$, при $n \rightarrow +\infty$?
3. Дат је низ независних случајних величина $X_1, X_2, \dots$, при чему је $P\{X_n = \pm n^\alpha\} = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. За које вредности $\alpha \in \mathbb{R}$ важи услов Љапунова?
4. ПОПРАВНИ ЗАДАТАК: Одредити коефицијент корелације $\rho_{X,Y}$, ако случајна величина X има $\varepsilon(1)$ расподелу, а случајна величина Y је дефинисана са $Y = [X]$, где $[\]$ означава целобројну вредност.