

СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ У ОПЕРАЦИОНИМ ИСТРАЖИВАЊИМА

Други колоквијум – 18. јануар 2013.

Сваки задатак носи по 5 поена.

1. Канцеларија располаже са два фотокопир-апарата, о чијем одржавању се старају два механичара. Сваки апарат ради (до настанка кvara) у временском интервалу експоненцијално расподељене дужине; очекивани период оперативности апарата је 5 дана. Покварену машину поправља тачно један од механичара и дужина трајања поправке је експоненцијално расподељена, са очекиваним периодом поправке од 4 дана.
- а) Описати систем одговарајућим ланцем Маркова (рећи какав ланац Маркова је у питању и кратко образложити; одредити матрице Q и P).
- б) Израчунати (асимптотски – гледано на дуге стазе) проценат времена током кога су оба механичара беспослена.
- в) Израчунати очекивани број апарата, који су у функцији (тј. раде), гледано на дуге стазе.
- г) Ако се зна да апарат у оперативном стању може да направи 100 фотокопија за један сат, колико фотокопија се, за један сат, може направити у целом систему, гледано на дуге стазе?

2. Посматра се ланац Маркова са непрекидним временом; простор стања је $S = \{1, 2, 3, 4\}$ а инфинитезимална матрица Q дата је са:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & - & - & - \\ 3 & - & 2 & 1 \\ - & 1 & -4 & 1 \\ - & - & 5 & -5 \end{pmatrix}$$

- а) Допунити елементе матрице Q , који недостају.
- б) Нацртати припадни граф (дијаграм стања) и одредити матрицу P .
- в) Да ли је описани ланац Маркова:
- процес рађања и умирања
 - процес чистог размножавања
 - процес чистог умирања
 - ниједан од понуђених процеса

Одабрати тачно један од одговора и кратко образложити.

- г) Израчунати очекивано време уласка система из стања 3 у апсорбујуће стање.

3. У рачунарском центру, при факултету, постоје два рачунара: A и B . Рачунар A користи се само за претраживање факултетске базе података, и нема излаз на интернет, док се рачунар B користи искључиво за претраживање интернета и нема приступ бази података. Претпоставља се да студент долази у центар са намером до користи тачно једну од те две услуге. Дужина временског интервала опслуживања студента, за сваки од рачунара, је експоненцијално расподељена, са очекиваним трајањем од по 3 min. Студенти који имају потребу за претраживањем факултетске базе података пристижу у складу са Пуасоновим процесом, са очекиваним периодом између узастопних долазака од 5 min, док студенти који имају потребу за претраживањем интернета пристижу у складу са Пуасоновим процесом, са интензитетом 18 студената по једном сату.

- а) Ако се за сваки рачунар формира засебан ред за чекање, израчунати: очекивано време чекања у реду за сваки од рачунара; (асимптотски) проценат времена током кога нико не користи рачунар A , односно рачунар B .

- б) Предложено је да се рад рачунарског центра реорганизује, тако што би се омогућило да сваки рачунар обавља оба посла: и претраживање факултетске базе података и претраживање интернета; формира се један, јединствен ред за чекање. У овој ситуацији, израчунати: очекивано време чекања у реду; (асимптотски) проценат времена током кога су оба рачунара слободна; (асимптотски) проценат времена током кога су оба рачунара заузета.

Упоредити сценарије а) и б) у погледу ефикасности.

- в) Ако одржавање сваког од рачунара кошта 25€ по сату, а задржавање сваког студента у центру кошта 0.3€ по сату, који је сценарио (под а) или под б)) исплативији (у смислу када центар има мањи трошак)?

4. Бензинска станица налази се у улици са густим саобраћајем. Станица има само једно место за сипање горива, и капацитет да прими укупно четири аутомобила. Како чекање на улици није дозвољено, због оптерећености саобраћаја, аутомобили који затекну присутна четири аутомобила на пумпи, одмах возе даље (не задржавају се). Аутомобили пристижу у складу са Пуасоновим процесом, просечно 28 аутомобила по сату, а дужина трајања њиховог опслуживања је експоненцијално расподељена, са очекивањем од 3 min.

- а) Поставити диференцијалне једначине за вероватноће $P_k(t)$.

- б) Решити једначине из дела а) у стационарном случају. Колико, процентуално, аутомобила не успе да натачи гориво и мора да се одвезе даље?

- в) Ако би се додало још једно место за сипање горива за колико би се повећао проценат аутомобила који уђу у станицу?