

ДОМАЋИ ЗАДАТАК 2 – СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ У ОПЕРАЦИОНИМ ИСТРАЖИВАЊИМА
јануар 2013.

1. Фабрика располаже са две машине (A и B), које се кваре независно једна од друге са интензитетом од 2 квара по дану за сваку машину понаособ (подразумева се дан од 24h). У фабрици је запослен техничар који одржава машине. Он никада не поправља обе покварене машине истовремено. Период поправке машине је експоненцијално расподељен, са очекивањем од 4h. Дужине трајања поправке машина су међусобно независне и независне од стања друге машине. Машина A се сматра значајнијом у производном процесу него машина B , тако да када се поквари машина A , техничар одмах почиње да је поправља, чак и у ситуацији ако већ ради на поправци машине B . У поменутој ситуацији, поправка машине B се наставља тек када је поправка машине A завршена.
- а) Описати систем одговарајућим ланцем Маркова.
б) Израчунати (асимптотски) проценат времена оперативности сваке од машина.
в) Израчунати проценат времена током кога је техничар заузет поправком машина.

2. Посматра се ланац Маркова са непрекидним временом; простор стања је $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ а инфинитезимална матрица Q дата је са:

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- а) Нацртати припадни граф (дијаграм стања) и одредити матрицу P .
б) Израчунати очекивано време уласка система из стања 0 у апсорбујуће стање.
3. Агенција за продају авионских карата је систем за чекање (претпоставља се неограниченог капацитета), са једним каналом за опслуживање (тј. једним службеником) и FIFO дисциплином опслуживања. Купци пристижу у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$, а дужине трајања опслуживања су независне и експоненцијално расподељене са параметром $\mu > 0$. Такође, постоји повратна веза (feedback): након завршетка опслуживања купац ће се, независно од прошлости, са фиксираним вероватноћом $0 < p < 1$ укључити на крај реда и поново чекати на опслуживање, или напустити систем са вероватноћом $q = 1 - p$. Купци ће, према томе, бити услужени више пута, пре него што коначно напусте систем.
- а) Описати систем одговарајућим ланцем Маркова. Затим, знајући да се у систему налази тачно $j > 0$ купаца, одредити интензивност прелаза система у стање $j - 1$. Поставити диференцијалне једначине за вероватноће $P_k(t)$.
б) Решити једначине из дела а) у стационарном случају. Који су потребни и довољни услови, који морају бити задовољени за параметре λ, μ, p , да би систем имао нетривијално решење? Прокоментарисати.
в) Одредити средњи број купаца у ситему, гледано на дуже стазе.
4. Бродови стижу у луку у просеку на свака 4 сата. Просечно време потребно да се роба утовари на брод је 10 сати. Просечно трајање задржавања брода у луци, пре почетка утовара, мање је од 14 сати. Претпоставља се да су дужине периода између узастопних долазака бродова и дужине трајања утовара експоненцијално расподељене. Колики мора бити минималан број екипа задужених за утовар?
5. Банка намерава да у скорој будућности својим клијентима омогући услугу електронског банкарства. Процењено је да захтеви клијената, електронским путем, стижу у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$. Дужине трајања опслуживања су експоненцијално расподељене. Треба одабрати један од следећа три система за компјутерско опслуживање клијената:

- систем са два сервера; захтеви клијената, у овој ситуацији, са вероватноћом по $\frac{1}{2}$, стижу на сваки од сервера, и чекају да буду обрађени; очекивана дужина трајања опслуживања клијента на сваком од сервера је по $\frac{1}{\mu}$, $\mu > 0$
- систем са два сервера; сви захтеви клијената, у овој ситуацији, се прикупљају по реду којим пристижу и преусмеравају на сервер, који је први слободан; очекивана дужина трајања опслуживања клијента на сваком од сервера је по $\frac{1}{\mu}$, $\mu > 0$
- систем са једним сервером, који ради два пута брже од сервера поменутих у претходне две ситуације

Одабрати оптималан систем од наведена три, поређењем њихових мера преформанси. Кратко прокоментарисати.

ЗА ВЕЖБУ:

6. Подаци се шаљу у облику пакета (packet), са експоненцијално расподељеном дужином и просечне дужине 1250 бајтова, компјутерском мрежом брзине 10Мбит/s. Претпоставља се да пакети стижу до система за слање у складу са Пуасоновим процесом, са интензитетом $\lambda > 0$. Ако је рутер који обавља слање слободан, пакет се одмах шаље, а ако није складишти се у бафер, редом којим је стигао у систем и опслужује по FIFO дисциплини.
- а) Ако је на располагању бафер неограничене величине, за које вредности параметра λ је средње време које пакет проведе у систему за слање мање од 1ms.
- б) Ако је бафер ограничене величине, колики треба да буде капацитет система да би губитак пакета (услед отказа) био не већи од 1% броја пакета.

Рок за предају домаћих задатака је: