

ДОМАЋИ ЗАДАТАК 1 – СТОХАСТИЧКИ МОДЕЛИ У ОПЕРАЦИОНИМ ИСТРАЖИВАЊИМА
новембар 2012.

1. Е-mail-ови стижу на сервер у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda = 120$ е-mail-ова у једном минути. Израчунати вероватноћу да у једноминутном временском интервалу 18 е-mail-ова стигне у току првих 10 секунди, а 9 е-mail-ова у току последњих 5 секунди.
2. Број посета некој web страници $X(t)$ у интервалу $(0, t]$, $t \geq 0$, може се представити као Пуасонов процес са интензитетом $\lambda > 0$ посета по једном сату. Израчунати вероватноћу да је било више посета страници у периоду од 8h до 9h него у периоду од 9h до 10h, ако се зна да је у периоду од 8h до 10h било укупно 10 посета.
3. Станодавац је 1. јануара дао оглас да издаје стан. Заинтересоване особе (потенцијални закупци) се јављају на оглас у складу са Пуасоновим процесом, са интензитетом $\lambda = 0.5$ особа по једном дану. Израчунати вероватноће догађаја:
 - а) до 15. јануара није се јавила ниједна заинтересована особа
 - б) до 20. јануара јавило се 6 потенцијалних купаца, а до 31. јануара њих 10
 - в) до 31. јануара јавило се 10 заинтересованих особа, ако се зна да их се до 20. јануара јавило 6
 - г) до 20. јануара јавило се 6 потенцијалних купаца, ако се зна да их се до 31. јануара јавило 10.
4. Гајгеров бројач детектује сваку другу честицу, која стиже до бројача. Честице стижу до бројача у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$. Означи се са $Y(t)$ број честица детектованих у интервалу $(0, t]$, $t \geq 0$, при чему се претпоставља да је прва детектована честица, она која друга стигне до бројача.
 - а) Израчунати $P\{Y(t) = n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$.
 - б) Израчунати $E(Y(t))$.Нека је T дужина временског интервала између два узастопна детектована доласка честица до бројача.
 - в) Одредити густину расподеле случајне величине T .
 - г) Израчунати ET .
5. Коста, Лазар и Милан играју се добацавања лопте. Коста баца лопту Лазару у 30% случајева, а у 70% случајева Милану. Лазар баца лопту Кости у 60% случајева, а Милану у 40% случајева. Милан добацује лопту својим другарима са подједнаким вероватноћама. Оваква игра може се представити ланцем Маркова.
 - а) Одредити простор стања $\mathcal{S}$, матрицу вероватноћа прелаза и нацртати припадни граф.
 - б) Одредити матрицу вероватноћа прелаза за два корака.
 - в) Израчунати вероватноће догађаја:
 - након трећег бацања лопта је код Милана, ако се зна да је након првог бацања била код Косте;
 - након трећег бацања лопта је код Милана, ако се зна да је на почетку игре (пре него што је почело добацавање) лопта била код Косте.
 - г) Претпостави се да игра траје дужи временски период. Израчунати у колико бацања (процентуално) је лопта код Лазара.

6. Нека је ланац Маркова $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, са три могућа стања, задат наредним графом:

и почетном расподелом $p_0 = 0.1$, $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.5$. Израчунати вероватноће:

a) $P[X_1 = 0, X_2 = 2, X_3 = 1]$

б) $P[X_3 = 2 | X_1 = 2]$

в) $P[X_3 = 1 | X_1 = 0]$

7. У неком туристичком одмаралишту промене временских прилика од дана до дана (поједностављено гледано) могу се описати ланцем Маркова са три могућа стања:

E_1 : сунце; E_2 : облаци; E_3 : киша

Користећи статистичке податке везане за временске прилике у тој географској области добијена је следећа матрица вероватноћа прелаза:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.7 & 0.0 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Туриста планира боравак у одмаралишту у периоду 30. децембар-1. јануар. Под претпоставком да има још доста времена до дочека Нове године, израчунати вероватноће:

a) да ће то бити три сунчана дана у низу;

б) да неће бити кише бар током прва два дана.

Рок за предају домаћих задатака је: