

1. Контрола залиха запаљивог производа: Запаљив производ складишти се у посебном резервоару на бензинској станици. Купци, који желе да купе овај производ, пристижу у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$. Сваки купац тражи тачно по једно паковање (мерну јединицу) производа. Ниједна потражња која се деси када су залихе производа распродате се не бележи. Прилике да се допуни залиха у резервоару јављају се у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\mu > 0$. Претпоставља се да су ова два Пуасонова процеса међусобно независна. Из разлога безбедности дозвољено је да се залиха допуни само онда када је залиха у потпуности распродата (тј. када је резервоар празан). У тим ситуацијама она се допуњује са R јединица производа, где је R унапред одређена вредност.

а) Моделирати описани проблем ланцем Маркова са непрекидним временом.

б) Одредити просечну количину залихе у резервоару, гледано на дуже стазе.

в) Одредити проценат незабележених потражњи купаца, гледано на дуже стазе.

2. Истовар бродова непоузданом машином: Бродови стижу на терминал у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом $\lambda > 0$. Бродови доносе товари контејнера. Постоји само једна машина која врши истовар терета. Она не може да врши истовар више од једног брода истовремено. Бродови се истоварују по редоследу којим пристижу. Претпоставља се да пристаниште на коме се налази терминал има довољан капацитет да прими све бродове који чекају. Дужина трајања истовара за сваки брод је експоненцијално расподељена случајна величина са параметром $\mu > 0$. Машина је, међутим, подложна кваровима. Квар се може догодити само док машина ради, тј. врши истовар. Дужина временског периода током кога је машина оперативна има експоненцијалну расподелу с параметром $\delta > 0$; дужина трајања поправке машине је експоненцијално расподељена с параметром $\beta > 0$. Сваки прекинути истовар брода наставља се тамо где је био прекинут. Претпоставља се да су дужине: трајања истовара, оперативног периода машине, трајања поправке међусобно независне и независне од процеса у складу са којим бродови пристижу до терминала. Моделирати описани проблем ланцем Маркова са непрекидним временом.

3. Брод има два навигациона уређаја и једног механичара, који отклања њихове кварове, редом, како се они дешавају. Сваки од уређаја ради у временском интервалу чија је дужина експоненцијално расподељена са очекиваним трајањем од 30 дана, док сваки квар захтева поправку са очекиваним трајањем од два дана. Моделирати описани проблем ланцем Маркова са непрекидним временом и одредити проценат времена истовремене неисправности оба уређаја, гледано на дуже стазе.

4. Један чувени фризер може да направи фризуру у временском интервалу експоненцијално расподељене дужине са очекивањем од 20 min. Муштерије долазе у његов салон, где је он једини запослени, у складу са Пуасоновим процесом, и то просечно једна особа у пола сата; међутим, ако су у тренутку уласка муштерије у салон обе столице за чекање заузете она одлази и не враћа се. Израчунати проценат времена када су у радњи три муштерије (тј. посао „цвета“), гледано на дуже стазе.

5. Нека је дат ланац Маркова са непрекидним временом, који има скуп стања $S = \{1, 2, 3, 4\}$ и инфинитезимални генератор Q дат са:

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Израчунати очекивано време до апсорпције из стања 1 у затворену класу (прецизније, апсорбујуће стање) $A = \{4\}$.

6. Један техничар одржава машине A и B . Сваки пут када је поправљена машина A , односно B , ради (до квара) у временском периоду експоненцијално расподељене дужине са очекивањем $\frac{1}{\lambda_A}$, односно $\frac{1}{\lambda_B}$. Када се машина A , односно B , поквари потребан је временски период експоненцијално расподељене дужине са очекивањем редом $\frac{1}{\mu_A}$, односно $\frac{1}{\mu_B}$, да се обави њена поправка. Машина A сматра се значајнијом у производном процесу, па техничар увек прво поправља машину A када је она у квару, тако да нпр. ако се машина A поквари док је машина B на поправци техничар престаје да ради на поправци машине B и почиње поправку машине A ; поправка машине B наставља се тек када је поправка машине A завршена.

а) Одредити (асимптотски) проценат времена, гледано на дуже стазе, када је машина B у квару.

б) Одредити (асимптотски) проценат времена, гледано на дуже стазе, када је техничар заузет поправком машина.

7. Задаци за вежбу бр. 362, 363, 364, 365, 366, 377, 378

„Збирка решених задатака из вероватноће и математичке статистике“, З. Глишић, П. Перуничкић