

1. (4 поена) Нека је дат ланац Маркова $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$, са простором стања $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и матрицом вероватноћа прелаза за један корак

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- а) Одредити класе комуникације марковског ланца X .
- б) Нека је $T_i^{(1)}$ случајна величина дефинисана са $T_i^{(1)} := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = i\}$, $i \in S$ (договор: $\inf \emptyset = +\infty$). Ако се зна да је ланац X кренуо из стања 1 као почетног, одредити (условну) расподелу за $T_1^{(1)}$. Израчунати $P_1\{T_1^{(1)} = +\infty\}$ и дати њену интерпретацију.
2. (4 поена) Дата су два новчића: фаличан новчић А са вероватноћом добијања писма у појединачном бацању једнаком 0.6 и фер новчић В. Увек се баца само један од новчића и то по следећем правилу: дати новчић узастопно се баца све док на њему не падне *грб*, а када се то догоди тај новчић се одложи са стране и низ бацања наставља са другим новчићем.
- а) Одредити асимптотску релативну учестаност, гледано на дуге стазе, догађаја замене новчића који се баца.
- б) Ако се на почетку на случајан начин (тј. са једнаком вероватноћом) бира новчић који ће се први бацати испитати да ли је вероватније да ће се треће бацање изводити са новчићем А или са новчићем В.
3. (3 поена) Производна хала опремљена је једном 'брзом' и једном 'спором' машином за обраду долазећих поруџбина (обе машине обављају исту врсту посла, само различитим брзинама). Поруџбине пристижу у складу са Пуасоновим процесом са интензитетом λ . Ако су обе машине заузете послом у тренутку доласка нове поруџбине, ова поруџбина се одбацује. У супротном, поруџбина се додељује брзој машини, ако је она слободна, а, ако није, поруџбину преузима спора машина. Дужине временских периода потребних за обраду поруџбине су независне, експоненцијално расподеле сл. величине са мат. очекивањима $1/\mu_1$ за брзу машину, односно $1/\mu_2$ за спору машину. Једном започета обрада поруџбине на спорој машини се НЕ прекида (тј. посао се не преусмерава на брзу машину ако се она у међувремену ослободи).
Моделирати описани систем ланцем Маркова са непрекидним временом. Решење детаљно образложити.

4. (4 поена) На слици је дат припадни граф ланца Маркова $X = \{X(t), t \geq 0\}$.

Нека је почетно стање овог ланца стање 5.

- а) Одредити очекивану количину времена које протекне до скока овог ланца у неко 'ново' стање.

- б) Нека је T тренутак првог скока ланца X . Одредити расподелу случајне величине $X(T)$ (пп. трајекторије марковског ланца су непрекидне здесна).

