

МОНТЕ-КАРЛО СИМУЛАЦИЈЕ

16. новембар 2017.

ГЕНЕРИСАЊЕ (ПСЕУДО)СЛУЧАЈНОГ БРОЈА ИЗ АПСОЛУТНО-НЕПРЕКИДНЕ РАСПОДЕЛЕ

- Ако је X случајна величина с непрекидном и монотono растућом функцијом расподеле F , случајна величина $Y = F(X)$ има $U(0, 1)$ расподелу. Према томе, функција расподеле случајне величине $F^{-1}(Y)$ је F .

➤ **Пример: генерисање (псеудо)случајног броја из $\varepsilon(\lambda)$ расподеле**

Ако је u (псеудо)случајан број из равномерне расподеле на инт. $(0, 1)$ онда је

$$x = -\frac{1}{\lambda} \log u$$

(псеудо)случајан број из $\varepsilon(\lambda)$ расподеле.

ГЕНЕРИСАЊЕ (ПСЕУДО)СЛУЧАЈНОГ БРОЈА ИЗ ДИСКРЕТНЕ РАСПОДЕЛЕ

- Нека је X ненегативна случајна величина са законом расподеле $p_j := P\{X = j\}$, $j \in \mathbb{N}_0$, при чему је $\sum_{j=0}^{+\infty} p_j = 1$. Нека је u (псеудо)случајан број из равномерне расподеле на инт. $(0, 1)$; генерисан је број $X = 0$ ако је $u < p_0$, односно број $X = j$ ако је

$$\sum_{k=0}^{j-1} p_k \leq u < \sum_{k=0}^j p_k.$$

СИМУЛАЦИЈА ХОМОГЕНОГ ПУАСОНОВОГ ПРОЦЕСА

ПРВИ НАЧИН (хомоген Пуасонов процес као процес обнављања)

- Низ тренутака (T_n) реализација догађаја у хомогеном Пуасоновом процесу са интензитетом λ , до задатог временског тренутка T_{stop} (у јединици мерења времена), може се симулирати следећим алгоритмом:

КОРАК 1: поставити $t = 0; i = 0$

КОРАК 2: генерисати број u из $U(0, 1)$ расподеле

КОРАК 3: $t = t + (-\log u / \lambda)$; ако је $t > T_{stop}$ 

КОРАК 4: поставити $i = i + 1; T_i = t$

КОРАК 5: вратити се на **КОРАК 2**.

ГЕНЕРИСАЊЕ (ПСЕУДО)СЛУЧАЈНОГ БРОЈА ИЗ ПУАСОНОВЕ РАСПОДЕЛЕ

- Нека је дат хомоген Пуасонов процес N са интензитетом λ и низом тренутака (T_n) реализација догађаја, односно низом (Y_n) дужина временских интервала између узастопних реализација. Случајна величина $N(1)$ има Пуасонову расподелу с параметром λ . Посматрајмо случајну величину $M = N(1) + 1$. Користећи репрезентацију процеса N као бројачког процеса, добија се:

$$\begin{aligned} M &= \min\{n \in \mathbb{N}: T_n > 1\} \\ &= \min\{n \in \mathbb{N}: Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n > 1\} \\ &= \min\left\{n \in \mathbb{N}: -\frac{1}{\lambda} \log U_1 - \frac{1}{\lambda} \log U_2 - \dots - \frac{1}{\lambda} \log U_n > 1\right\} \\ &= \min\left\{n \in \mathbb{N}: \prod_{i=1}^n U_i < e^{-\lambda}\right\}, \end{aligned}$$

где је $(U_1, U_2, \dots, U_n)$ прост случајан узорак из $U(0, 1)$ расподеле.

ГЕНЕРИСАЊЕ (ПСЕУДО)СЛУЧАЈНОГ БРОЈА ИЗ ПУАСОНОВЕ РАСПОДЕЛЕ

Према томе, (псеудо)случајан број k из $\mathcal{P}(\lambda)$ расподеле може се генерисати следећим алгоритмом:

КОРАК 1: поставити $k = 0; p = 1$

КОРАК 2: генерисати број u из $U(0, 1)$ расподеле; поставити $p = u \cdot p$

КОРАК 3: ако је $p < e^{-\lambda}$  ; иначе, $k = k + 1$ и вратити се на **КОРАК 2**.

СИМУЛАЦИЈА ПРОЦЕСА ОБНАВЉАЊА

- Низ тренутака (T_n) обнављања, до задатог временског тренутка T_{stop} , при чему је низ (Y_n) дужина временских интервала између узастопних обнављања i.i.d. низ са функцијом расподеле F , може се симулирати следећим алгоритмом:

КОРАК 1: поставити $t = 0; i = 0$

КОРАК 2: генерисати број y из расподеле вероватноћа одређене функцијом расподеле F

КОРАК 3: $t = t + y$; ако је $t > T_{stop}$ 

КОРАК 4: поставити $i = i + 1; T_i = t$

КОРАК 5: вратити се на **КОРАК 2**.

СИМУЛАЦИЈА ХОМОГЕНОГ ПУАСОНОВОГ ПРОЦЕСА

ДРУГИ НАЧИН (својство статистика поретка Пуасоновог процеса)

- Низ тренутака (T_n) реализација догађаја у хомогеном Пуасоновом процесу са интензитетом λ , до задатог временског тренутка T_{stop} , може се симулирати следећим алгоритмом:

КОРАК 1: генерисати број N из $\mathcal{P}(\lambda T_{stop})$ расподеле; ако је $N = 0$

КОРАК 2: генерисати N бројева из $U(0, 1)$ расподеле: $u_1, u_2, \dots, u_N$ 
ресетовати их: $u_i = T_{stop} \cdot u_i, i = \overline{1, N}$

КОРАК 3: уредити u_i монотono растуће тако да се добије варијациони низ
 $u_{(1)} < u_{(2)} < \dots < u_{(N)}$ овог простог случајног узорка

КОРАК 4: поставити $T_i = u_{(i)}, i = \overline{1, N}$.

СИМУЛАЦИЈА НЕХОМОГЕНОГ ПУАСОНОВОГ ПРОЦЕСА

ПРВИ НАЧИН (приступ преко временског узорковања)

- Нека је дат нехомоген Пуасонов процес са функцијом интензитета $\lambda(\cdot)$. Претпоставимо да се може одредити константа $\bar{\lambda}$, таква да је $\lambda(t) \leq \bar{\lambda}$ за свако $t \leq T_{stop}$. Низ тренутака (T_n) реализација догађаја у овом процесу, до задатог временског тренутка T_{stop} , може се симулирати следећим алгоритмом:

КОРАК 1: поставити $t = 0; i = 0$

КОРАК 2: генерисати број u из $U(0, 1)$ расподеле

КОРАК 3: $t = t + (-\log u / \bar{\lambda})$; ако је $t > T_{stop}$

КОРАК 4: генерисати број u из $U(0, 1)$ расподеле

КОРАК 5: ако је $u \leq \lambda(t) / \bar{\lambda}$ поставити $i = i + 1; T_i = t$

КОРАК 6: вратити се на **КОРАК 2**.

СИМУЛАЦИЈА НЕХОМОГЕНОГ ПУАСОНОВОГ ПРОЦЕСА

ДРУГИ НАЧИН (приступ преко трансформације)

- Нека је дат нехомоген Пуасонов процес са функцијом средње вредности $\mu(\cdot)$. Претпоставимо да постоји инверз μ^{-1} функције μ . Низ тренутака (T_n) реализација догађаја у овом процесу, до задатог временског тренутка T_{stop} , може се симулирати следећим алгоритмом:

КОРАК 1: поставити $t = 0; i = 0$

КОРАК 2: генерисати број u из $U(0, 1)$ расподеле

КОРАК 3: $\tilde{t} = \tilde{t} + (-\log u)$; $t = \mu^{-1}(\tilde{t})$; ако је $t > T_{stop}$ 

КОРАК 4: поставити $i = i + 1; T_i = t$

КОРАК 5: вратити се на **КОРАК 2**.

СИМУЛАЦИЈА МЕШОВИТОГ ПУАСОНОВОГ ПРОЦЕСА

- Нека је дат (хомоген) мешовити Пуасонов процес, код кога је $\mu(t) = t$ и θ је мешајућа променљива са функцијом расподеле G . Низ тренутака (T_n) реализација догађаја у овом процесу, до задатог временског тренутка T_{stop} , може се симулирати следећим алгоритмом:

КОРАК 1: генерисати број θ из расподеле вероватноћа одређене функцијом расподеле G

КОРАК 2: поставити $t = 0; i = 0$

КОРАК 3: генерисати број u из $U(0, 1)$ расподеле

КОРАК 4: $t = t + (-\log u / \theta)$; ако је $t > T_{stop}$ 

КОРАК 5: поставити $i = i + 1; T_i = t$

КОРАК 6: вратити се на **КОРАК 3**.

ΛΙΤΕΡΑΤΥΡΑ

- “Simulation (5th edition)”
Sheldon **Ross** 2013.
- “Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance”
Ralf **Korn**, Elke **Korn**, Gerald **Kroisandt** 2010.