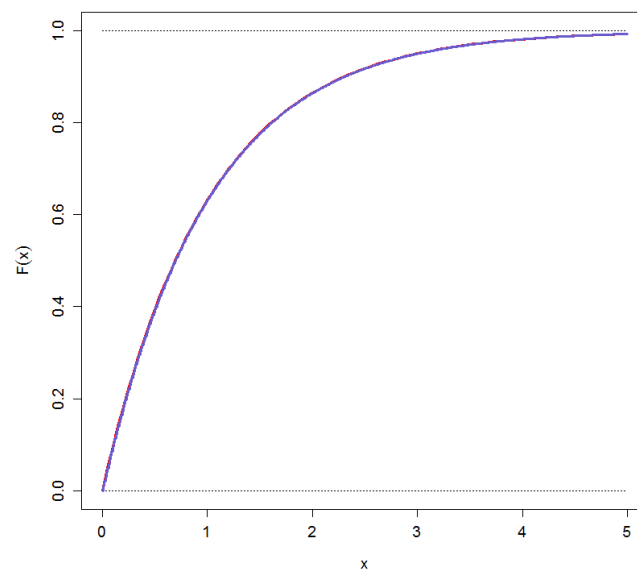
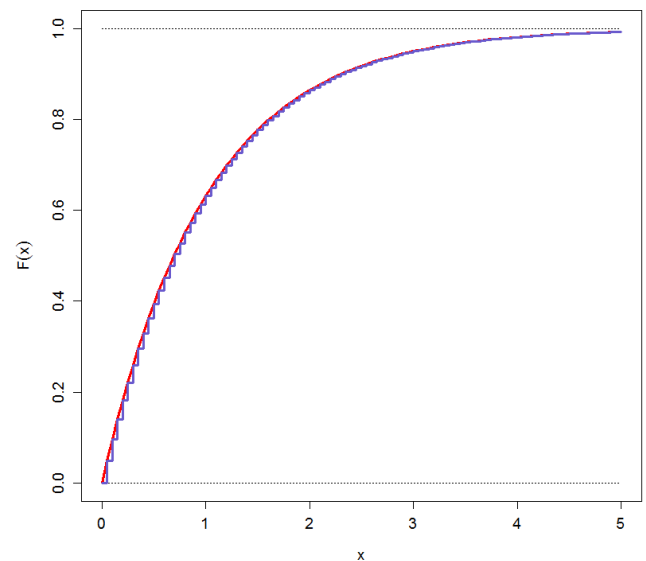
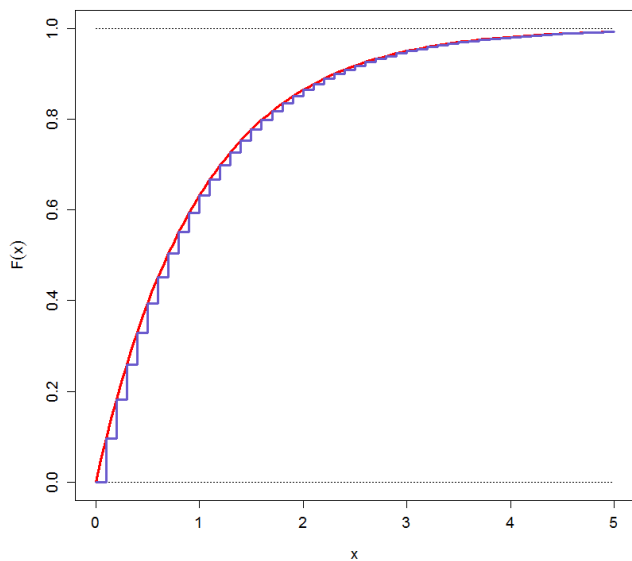




Дискретизација експоненцијалне расподеле.

Дискретизацијом случајне величине X са експоненцијалном $\varepsilon(1)$ добијена је случајна величина Y концентрисана на решетки $z\mathbb{N}_0$, методом 'matching probabilities': $P\{Y = k\} = F(k) - F(k - 1)$, $k = 0, z, 2z, \dots$, где је $F(\cdot)$ функција расподеле случајне величине X .

Дати су графици одговарајућих функција расподеле случајних величина X и Y за $z = 0.1$, $z = 0.05$, $z = 0.01$ (слева надесно, одозго надоле).

Евидентно је да се квалитет дискретизације побољшава са смањењем 'корака' z .

x	$P\{S \leq x\}$ за $k = 20$	$P\{S \leq x\}$ за $k = 50$	$P\{S \leq x\}$ за $k = 100$
5	0.009127195	0.008996417	0.008955484
10	0.132191129	0.131537893	0.131324631
15	0.386905355	0.386100613	0.385832273
20	0.625832771	0.625243662	0.625045022
25	0.783786737	0.783437855	0.783319577
30	0.874139471	0.873947274	0.873881986
35	0.923732174	0.923626622	0.923590767
40	0.951276402	0.951216623	0.951196338
45	0.967157191	0.967121770	0.967109768
50	0.976755923	0.976733885	0.976726430
55	0.982845223	0.982830854	0.982826000
60	0.986886997	0.986877223	0.986873926
65	0.989680287	0.989673386	0.989671061
70	0.991679887	0.991674856	0.991673162
75	0.993155404	0.993151632	0.993150364
80	0.994272946	0.994270051	0.994269078
90	0.995822159	0.995820349	0.995819742
100	0.996818651	0.996817447	0.996817043

Апроксимативне вредности вероватноће $P\{S \leq x\}$.

Разматра се сложена случајна величина $S = \sum_{j=1}^N X_j$,

при чему $N \in \mathcal{P}(20)$, а (X_n) је i.i.d. низ случајних величина са Паретовом расподелом $f_{X_1}(x) = \frac{as^a}{(x+s)^{a+1}}$, $x > 0$,

где је a параметар облика, а s параметар размере (овде је конкретно: $a = 2$, $s = 1$).

Идеја се састоји у томе да се прво дискретизује расподела величине одштете и да се затим искористи Panjer-ов рекурзивни алгоритам како би се одредиле вероватноће догађаја $\{S = k\}$.

При томе, за произвољну позитивну константу k сл. величина kS има сложену Пуасонову расподелу (kX_1 има Паретову расподелу с параметрима $a = 2$, $s = k$).

Сада се дефинише сложена случајна величина S_d код које сабирци имају дискретну верзију Паретове расподеле с параметрима $a = 2$, $s = k$. Ова сл. величина има дискретну расподелу и вероватноће из њеног закона расподеле могу се одредити Panjer-овом рекурзивном формулом.

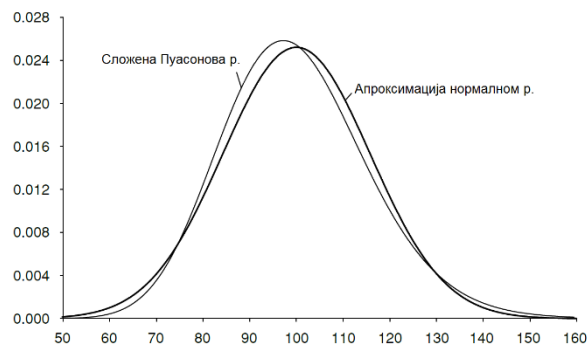
Тада важи:

$$P\{S \leq x\} = P\{kS \leq kx\} \approx P\{S_d \leq kx\}.$$

Дискретизација је овде вршена методом 'matching moments' тако да оригинална сл. величина и њена дискретна верзија имају једнака мат. очекивања (погледати функцију `discretize` у R-пакету `actuar`).

Напомена: исти резултат се добија ако се врши дискретизација сл. величине kX_1 са кораком 1 (дискретна верзија је концентрисана на $\mathbb{N}_0$), односно сл. величине X_1 са кораком $1/k$ (дискретна верзија је концентрисана на $\mathbb{N}_0/k$).

Резултати у табели указују на то да повећање вредности k нема великог утицаја на квалитет апроксимације и то посебно код вероватноћа блиских јединици.



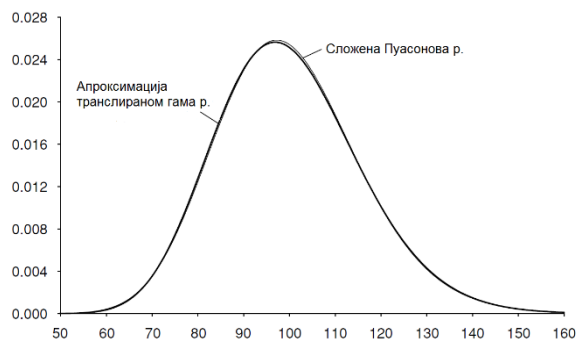
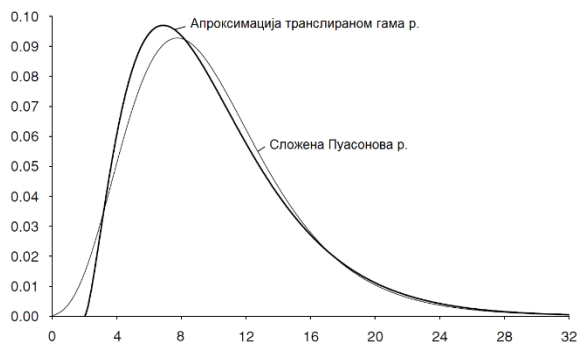
Случајна величина S има сложену Пуасонову расподелу,

при чему $N \in \mathcal{P}(\lambda)$, а X_1 има логнормалну расподелу са мат. очекивањем 1 и дисперзијом 1.5.

На графицима су приказане: тачна густине расподеле сл. величине S и густина расподеле одговарајуће нормалне апроксимације за $\lambda = 10$ (лево), односно $\lambda = 100$ (десно).

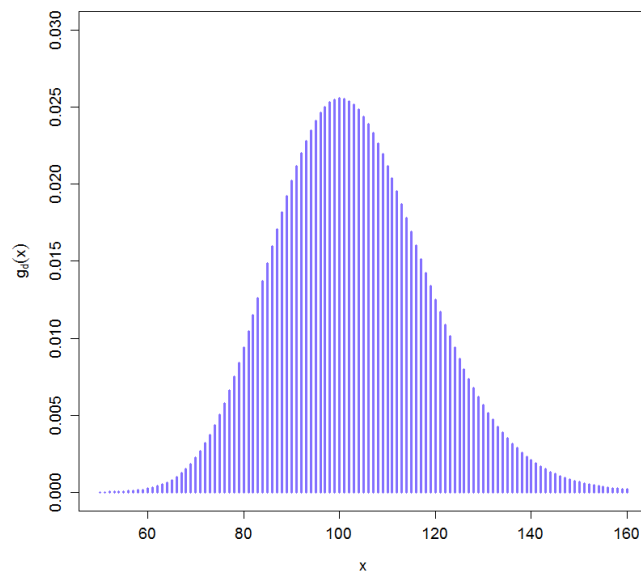
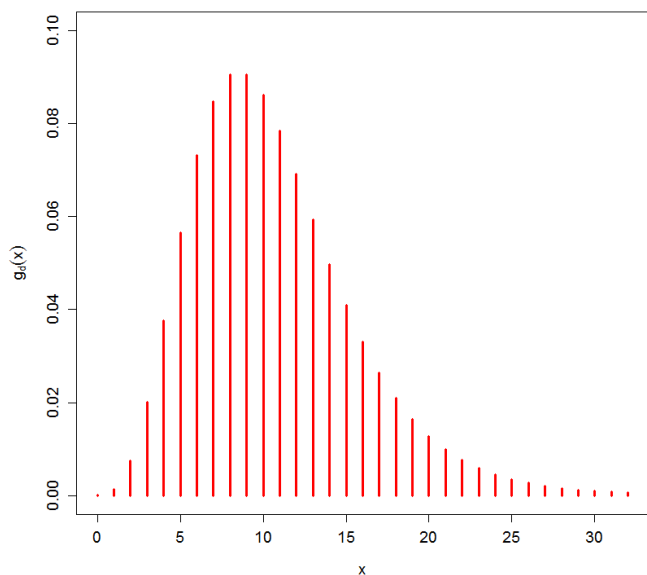
Приметити да апроксимација у случају $\lambda = 10$ није баш добра. Прво, тачна расподела за S је позитивно асиметрична, док је нормална расподела симетрична. Друго, за тачну расподелу случајне величине S важи $P\{S < 0\} = 0$, што, наравно није тачно код нормалне апроксимације.

У случају $\lambda = 100$ ствари су битно другачије: тачна расподела за S је и даље позитивно асиметрична али са значајно мањим коефицијентом асиметрије, а приближна вредност $P\{S < 0\}$ код одговарајуће нормалне апроксимације је 0.



Сада су на графицима приказане: тачна густине расподеле сл. величине S и густина расподеле одговарајуће транслиране гама расподеле, којом се врши апроксимација и то за $\lambda = 10$ (лево), односно $\lambda = 100$ (десно). Приметити да апроксимативна густина расподеле у случају $\lambda = 10$ има исти облик као тачна густина расподеле и да њен график, на десном крају, лежи изнад графика тачне густине, што није био случај код нормалне апроксимације.

У случају $\lambda = 100$ апроксимација се показала одличном.



На графицима су приказани дијаграми расподеле вероватноћа сл. величине S добијени Panjer-овим рекурзивним алгоритмом (дискретизација је вршена методом 'matching probabilities' са кораком 0.05) и то за $\lambda = 10$ (лево), односно $\lambda = 100$ (десно).

У следећој табели дате су приближне вредности 95% квантила расподеле случајне величине S :

	$\lambda = 10$	$\lambda = 100$
Нормална апроксимација	18.23	126.0
Апроксимација транслираном гама расподелом	19.59	127.7
Panjer-ов рекурзивни алгоритам	19.15	127.5