

6. Тригонометријске једначине и неједначине

5. (ж) Сви квадратни триноми се лепо растављају.

(з) У првој неједнакости за $x \neq k\pi$, можемо и леву и десну страну помножити са $\cos^2 x$. Добијамо $\sin 2x > \frac{\sqrt{3}}{2}$, односно $2x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) + 2k\pi \Leftrightarrow x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right) + k\pi$.

Као прво, мора бити $\sin 2x \neq 0$, односно $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. Под тим условима је $\sin 4x + \cos 4x \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{1}{\sin 2x} (\sin 2x \sin 4x + \cos 2x \cos 4x) = \frac{1}{\sin 2x} \cos(4x - 2x) = \operatorname{ctg} 2x > 1$. То значи да $2x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) + k\pi$, односно $x \in \left(0, \frac{\pi}{8}\right) + \frac{k\pi}{2}$.

8. Рекурентно задати низови

6. (а) Означимо

$$S = 1 + 3q + 5q^2 + \dots + (2n+1)q^n. \quad (1)$$

Тада је

$$qS = q + 3q^2 + 5q^3 + \dots + (2n+1)q^{n+1}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) добијамо да је $S - qS = (1 - q)S = 1 + 2q + 2q^2 + \dots + 2q^n - (2n+1)q^{n+1}$, односно $(1 - q)S = 1 + 2q \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + (2n+1)q^{n+1}$.

9. Диференцне једначине

1. (а) $x_n = c \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^n$. За $n = 0$ мора бити $x_0 = a$, одакле добијамо $c = a$. Према томе, $x_n = a \cdot \left(-\frac{1}{10}\right)^n$.

(б) Решење одговарајуће хомогене једначине је $X_n = c$. Партикуларно решење нехомогене једначине потражимо у облику: $p_n = \alpha n^2 + \beta n$. Замењивањем овог израза у једначину $p_{n+1} = p_n + 8n$, закључујемо да је $\alpha = 4$ и $\beta = -4$. То значи да је решење облика $x_n = c + 4n^2 - 4n$. Како је $x_1 = 1$, добијамо да је $c = 1$, што значи да је $x_n = (2n - 1)^2$.

(в) Поступамо као у претходном задатку. Решење хомогене једначине је $X_n = c$, а партикуларно решење се тражи у облику $p_n = \alpha n^2 + \beta n$. Када то уврстимо у једначину $p_{n+1} = p_n + 2n - 2$, добијамо да је $\alpha = 1$ и $\beta = -3$. Опште решење је $x_n = c + n^2 - 3n$. Коефицијент c одређујемо из услова $x_0 = 2$. Добијамо $c = 2$, и коначно, $x_n = n^2 - 3n + 2 = (n - 1)(n - 2)$.

(г) Решење хомогене једначине је $x_n = c$. Партикуларно решење нехомогене једначине потражимо у облику $p_n = \alpha a^n$. Замењивањем у полазну једначину добијамо: $\alpha a^{n+1} = \alpha a^n + a^n$, односно $(\alpha a - \alpha - 1)a^n = 0$. Изаберимо α тако да буде $\alpha a - \alpha - a = 0$, односно $\alpha = \frac{a}{a-1}$. Решење полазне једначине је $x_n = c + \frac{a^{n+1}}{a-1}$. Заменом почетног услова добијамо $1 = c + \frac{a^2}{a-1}$ и $c = \frac{a^2 - a + 1}{1 - a}$. Решење једначине је $x_n = \frac{a^2 - a + 1 - a^{n+1}}{1 - a}$.

2. $S_{n+1} = S_n + \frac{n+1}{3^{n+1}}$. Решење хомогене једначине $S_{n+1} = S_n$ је $S_n = c$, за неку реалну константу c . Партикуларно решење ћемо потражити у облику $P_n = \frac{an+b}{3^n}$. Из једначине $\frac{a(n+1)+b}{3^{n+1}} = \frac{an+b}{3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}}$ изједначимо коефицијенте уз n и слободне чланове и добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} a &= 3a + 1 \\ a + b &= 3b + 1 \end{aligned}$$

из кога одређујемо $a = -\frac{1}{2}$ и $b = -\frac{3}{4}$. Одавде је $S_n = c - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$. Из услова $S_1 = \frac{1}{3}$, добијамо да је $c = \frac{3}{4}$. Одавде следи $S_n = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$.