

2. (а) Као прво мора бити $x \leq 2$ и $x \leq 2a$. Полазна једначина је еквивалентна са $\sqrt{2-x} = \frac{2-x}{2} + a - 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2-x}-1)^2 = 3-2a$. Сада добијамо и услов $3-2a \geq 0$, односно $a \leq \frac{3}{2}$. Решења последње једначине су $x = 2a - 2 \pm 2\sqrt{3-2a}$. Треба још да проверимо да ли ова решења задовољавају добијене услове. Први услов $x \leq 2$ задовољава и веће решење $2a - 2 + 2\sqrt{3-2a}$, јер се при услову $a \leq \frac{3}{2}$ неједнакост $\sqrt{3-2a} \leq 2-a$ може квадрирати и добити да је она еквивалентна са $(a-1)^2 \geq 0$. Треба да испитамо да ли ова решења задовољавају $x \leq 2a$. Решење $2a - 2 - 2\sqrt{3-2a}$, очигледно задовољава овај услов. Размотримо сада релацију $2a - 2 + 2\sqrt{3-2a} \leq 2a$. Она је еквивалентна са $\sqrt{3-2a} \leq 1$, односно, после дозвољеног квадрирања, $3-2a \leq 1 \Leftrightarrow a \geq 1$. Дакле:

$$x = \begin{cases} 2a - 2 - 2\sqrt{3-2a}, & \text{за } a < 1 \\ 2a - 2 \pm \sqrt{3-2a}, & \text{за } 1 \leq a \leq \frac{3}{2} \\ \text{нема решења,} & a > \frac{3}{2} \end{cases}$$

- (б) Закључујемо да је $x \geq 0$, $a \geq \sqrt{a+x} \Rightarrow a^2 - a \geq x \geq 0 \Rightarrow a = 0$ или $a \geq 1$. За $a = 0$, x мора бити 0, и провером се утврђује да $x = 0$ при овом услову заиста јесте решење. Претпоставимо да је $a \geq 1$. У том случају полазна једначина може да се квадрира. Добија се: $a - \sqrt{a+x} = x^2 \Leftrightarrow a+x-x^2 = x + \sqrt{a+x} \Leftrightarrow (\sqrt{a+x}+x)(\sqrt{a+x}-x) = x + \sqrt{a+x}$. Пошто је $x + \sqrt{a+x} > 0$ можемо скратити и леву и десну страну. Добијамо: $\sqrt{a+x} = x+1 \Rightarrow x^2+2x+1 = a+x \Leftrightarrow x^2+x+1-a = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$. Пошто мора бити $x > 0$, добијамо $x = \frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$ за $a \geq 1$.
- (в) Једначина се једноставно решава степеновањем са 3. Решења су $x = 0$ и $x = \frac{63}{65}a$.
3. (а) $(1, +\infty)$; $[0, 1)$; $[0, +\infty)$; $\emptyset$.
- (б) $x \geq 50$; $[0, 5]$.
- (в) Неједначина је еквивалентна са $\sqrt{x^2-x+1} < 2(x^2-x)+1$. Нека је $t = x^2-x$. Пошто су обе стране веће од 1, можемо квадрирати неједначину. Добијамо: $t+1 < 4t^2+4t+1 \Leftrightarrow t(4t+3) > 0$. Одавде закључујемо да је $t > 0$ или $t < -\frac{3}{4}$. Случај $t < -\frac{3}{4}$ је немогућ, а за $t > 0$ је $x < 0$ или $x > 1$. Дакле, решење је $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$;
Друга једначина нема решења: Из $8x > 3$ закључујемо да је и $x > 0$, па моземо и леву и десну страну да помножимо са $4x$. Једначина постаје: $1-4x \geq \sqrt{8x-3}$. Добијамо да је $\frac{3}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}$, што је немогуће.
- (г) Прва једначина нема решења јер је $4x-3 > 3x-5$ за оне x -еве за које су дефинисане поткорене величине; Решење друге неједначине је $[1, +\infty)$.

4. Мора бити $a > 0$, $x > 0$ и $\sqrt{x} > a$. Квадрирањем се добија: $2a + 2\sqrt{a^2-x} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2-x} < 1-a \Rightarrow a < 1 \Rightarrow a^2-x < a^2-2a+1 \Rightarrow x > 2a-1$. То значи да је $0 \leq x \leq a^2$ за $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, а $2a-1 < x \leq a^2$ за $\frac{1}{2} < a < 1$

5. (а) $D = [-78, 3)$;

- (б) $x^2+3x+3 > 0$ за свако $x \in \mathbb{R}$. Треба још да буде $1+2x \geq \sqrt{x^2+3x+3}$. То значи да је $1+2x \geq 0$ и $1+4x+4x^2 > x^2+3x+3$. Решење друге неједначине је скуп $(-\infty, -1] \cup [\frac{2}{3}, +\infty)$. Пресек са скупом $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ чини тражени домен $D = [\frac{2}{3}, +\infty)$.

5. Логаритамске и експоненцијалне једначине и неједначине

1. (в) Пошто је домен функције $(x+2)^{x+15}$ једнак $(-2, +\infty)$, закључујемо да се уз ову претпоставку може обрисати апсолутна заграда. Добијамо $(x+2)^{x^2+3x} = (x+2)^{x+15}$, па је $x^2+3x = x+15$. Решења ове једначине су $x = -5$ и $x = 3$, међутим само ово друго задовољава услов $x > -2$, па је једино решење $x = 3$.

2. (а) $\frac{1}{16}$.