

5. (д) Искористити да је $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$.

4. Ирационалне једначине и неједначине

1. (а) $y = 7$; $x = 6$.

- (б) Да би корени били дефинисани, мора бити $x \in [-3, 5)^C = (-\infty, -3) \cup [5, +\infty)$. Пошто је лева страна позитивна, мора бити и десна, па је $x \geq -2$. Због тога је $x \geq 5$. Сада и лева и десна страна могу да се помноже са $\sqrt{(x-4)(x+2)}$ и квадрирају. Добија се

$$\sqrt{(x-5)(x+3)} + \sqrt{(x-4)(x+2)} = 7.$$

Уведимо смену $z = \sqrt{(x+2)(x-4)}$. Тада једначина постаје $\sqrt{z^2 - 7} + z = 7$. Решење ове једначине је $z = 4$. Из $(x-4)(x+2) = 16$ добијамо $x = 6$ или $x = -4$, али само $x = 6$ задовољава услов $x \geq 5 \rightarrow x = 6$.

- (в) $x \in [5, 10]$.

- (г) Мора бити $x \leq a^2$, $x \leq b^2$ и $a + b \geq 0$. Под тим условима можемо квадрирати и леву и десну страну. Добијамо да је једначина еквивалентна са: $a^2 + b^2 - 2x + 2\sqrt{a^2b^2 - (a^2 + b^2)x + x^2} = a^2 + b^2 + 2ab$. Сређивање последње једначине доводи до:

$$\sqrt{a^2b^2 - x(a^2 + b^2) + x^2} = ab + x.$$

Лева страна је позитивна, па мора бити $x \geq -ab$. Под том претпоставком можемо квадрирати и леву и десну страну. Добијамо: $x(a+b)^2 = 0$. Ако је $a+b = 0$, тада је $a = -b$, што уз услов $x \geq -ab$ даје $x \geq a^2$. Како је и $x \leq a^2$, добијамо да је $x = a^2$. У том случају се лако проверава да ово заиста јесте решење дате једначине. Ако је $a+b \neq 0$, једино $x = 0$ може да буде решење полазне једначине. Замењивањем $x = 0$ у полазну једначину, добијамо $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$, односно $|a| + |b| = a + b$, што јесте тачно само у случају $a, b \geq 0$. Дакле решење једначине је:

$$x = \begin{cases} 0, & a, b \geq 0 \\ a^2, & a = -b \\ \text{нема решења,} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Једначина $\sqrt{x-a} + \sqrt{b+x} = \sqrt{a+b}$ може имати решења само при услову $a+b \geq 0$. Лако се добија да су, у том случају, једина решења $x = a$ и $x = -b$.

- (д) И леву и десну страну степењујемо са 3. Добијамо $3x - 3 + 3\sqrt[3]{x(2x-3)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}) = 12(x-1)$. Када ову једначину поделимо са 3 и искористимо да је $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12x-1}$, добијамо да је полазна једначина еквивалентна са: $\sqrt[3]{12x(2x-3)(x-1)} = 3(x-1)$. Степеновањем са 3 добијамо $12x(2x-3)(x-1) = 27(x-1)^3$, односно $(x-1)(9x^2 - 18x + 9 - 8x^2 + 12x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3)^2 = 0$. Решења су $x = 1$ и $x = 3$.

Друга једначина се решава на сличан начин и добија се да је скуп њених решења једнак $\left\{8, 8 - \frac{12\sqrt{21}}{7}, 8 + \frac{12\sqrt{21}}{7}\right\}$.

- (ђ) Поткорени изрази могу да се лепо раставе на чиниоце. Под условом да су они дефинисани (а тај услов се лако одређује), једначина може да се квадрира... Решења су $x = -1$ и $x = 5$.

Друга једначина се слично решава: $x = 2$ и $x = 4$

- (е) Квадрирањем (под условом да су коренови дефинисани) добијамо:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{(x^2+x)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 0 \text{ и } (x^2+x)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Закључујемо да је $x = -1$, и то јесте решење.