

- (б) Домен функције $\arctg$ је цео скуп реалних бројева, па је домен функције f једнак домену функције $\arcsin\left(\ln\frac{x+3}{x+1}\right)$. Мора бити $\ln\frac{x+3}{x+1} \in [-1, 1]$, односно $\frac{x+3}{x+1} \in [\frac{1}{e}, e]$. Сада је једначина домена постала: $\frac{1}{e} \leq \frac{x+3}{x+1} \leq e$. Ако бисмо хтели да ову неједначину помножимо са $x+1$, морали бисмо да водимо рачуна о томе да ли је тај израз позитиван, или негативан. На тај начин би требало разматрати два случаја. Мање посла ћемо имати, ако једначину помножимо позитивним бројем $(x+1)^2$. Ту само морамо водити рачуна да овај број буде $\neq 0$. Према томе, мора бити $x \neq -1$ (дакле -1 није из домена функције). Неједначина постаје $\frac{1}{e}(x+1)^2 \leq (x+3)(x+1) \leq e(x+1)^2$. Десна неједначина се еквивалентно трансформише у $(e-1)x^2 + 2(e-2)x + (e-3) \geq 0$, тј.

$$((e-1)x + e - 3)(x+1) \geq 0. \quad (1)$$

Лева неједначина се трансформише, на сличан начин у $((\frac{1}{e}-1)x + \frac{1}{e} - 3)(x+1) \leq 0$. Ако последњу неједначину помножимо са $-e$, добијамо

$$((e-1)x + 3e - 1)(x+1) \geq 0. \quad (2)$$

Решење прве једначине је $x \in (-\infty, -1] \cup \left[\frac{3-e}{e-1}, +\infty\right)$, а друге је $x \in \left(-\infty, -\frac{3e-1}{e-1}\right] \cup [-1, +\infty)$. Домен функције f је кад се од пресека ова два скупа одузме $\{-1\}$:

$$D = \left(-\infty, \frac{1-3e}{e-1}\right] \cup \left[\frac{3-e}{e-1}, +\infty\right).$$

3. Елементарне функције

3. (в) Треба да нађемо најмањи позитиван реалан број T тако да буде $f(x+T) = f(x)$, односно $\sin(2x+2T) - \sin(5x+5T) = \sin 2x - \sin 5x$. То мора да важи за свако x . Стављањем $x = 2\pi$, добијамо: $\sin 2T - \sin 5T = 0$, а стављањем $x = \pi$, добијамо $\sin 2T + \sin 5T = 0$, одакле закључујемо да је $\sin 5T = 0$ и $\sin 2T = 0$. Одавде следи да је $T = k\pi$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Замењивањем у полазну једначину добијамо да је $\sin(2x+2k\pi) - \sin(5x+5k\pi) = \sin 2x - \sin 5x$ еквивалентно са $\sin 2x - (-1)^k \sin 5x = \sin 2x - \sin 5x$. Да би ово важило за свако x , k мора бити паран број. Најмање такво k је 2. Лако се проверава да је $T = 2\pi$ заиста период ове функције f ;
У другом задатку функција није дефинисана за $\frac{2x}{5} \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, доносно за $x \in \{\frac{5\pi}{4} + \frac{5}{2}k\pi\}$. Због тога T мора бити целобројни умножак броја $\frac{5}{2}\pi$. Али, тада је функција $\tg \frac{2x}{5}$ периодична, па је још потребно пронаћи оно T које поред услова да је $T = \frac{5}{2}l\pi$ за неко $l \in \mathbb{N}$ задовољава и услов

$$\sin\left(\frac{3x}{7} + \frac{3T}{7}\right) + \cos\left(\frac{x}{7} + \frac{T}{7}x\right) = \sin \frac{3x}{7} + \cos \frac{x}{7}.$$

Замењивањем $x = 14\pi$ и $x = \frac{14\pi}{3}$ добијамо једначине

$$\sin \frac{3T}{7} + \cos \frac{T}{7} = 1 \quad (1)$$

$$\sin \frac{3T}{7} + \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{T}{7} - \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{T}{7} = \cos \frac{2\pi}{3} \quad (2)$$

Замењивањем једначине (1) у једначину (2) добијамо $\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cos \frac{T}{7} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{T}{7}$, односно $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(\frac{T}{7} + \frac{\pi}{3}\right)$. Решења ове једначине у $(0, 2\pi]$ су $\frac{T}{7} = \frac{\pi}{3}$ и $\frac{T}{7} = 2\pi$. Ако је $\frac{T}{7} = \frac{\pi}{3}$, онда је $\sin\left(\frac{3x}{7} + \pi\right) + \cos\left(\frac{x}{7} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{3x}{7} + \cos \frac{x}{7}$ за свако x . Међутим, већ за $x = 0$ то не важи. Према томе, $\frac{T}{7} = 2m\pi$. За свако $m \in \mathbb{N}$ ово јесте период функције $\sin \frac{3x}{7} + \cos \frac{x}{7}$, па још само треба изабрати m тако да буде и $T = \frac{5}{2}l\pi$ за неко $l \in \mathbb{N}$. То значи да је $14m = \frac{5}{2}l$. Најмање m које ово задовољава је $m = 5$. Закључујемо да је $T = 70$.