

РЕШЕЊА И УПУТСТВА

1. Елементарне функције

1.

$$\frac{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$$

Помножимо и бројилац и именилац са $\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. Добијамо да је дати разломак једнак

$$\frac{(\sqrt{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt{2\sqrt{3}-\sqrt{2}})^2}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{10}}{2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{10}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}+\sqrt{6}.$$

5. Оба решења ће бити једнака ако и само ако је дискриминанта једнака нули, односно (после скраћивања са 2) ако је $(m+1)^2 = 4(m^2 - 3m - 1)$. Следи да је $m \in \{-\frac{1}{3}, 5\}$.
6. Функција $g(x)$ нема максимум, јер за $y = 0$, погодним избором вредности за x , можемо постићи да функција узима произвољно велике реалне вредности. Међутим, функција има минимум, што се види из следећег представљања:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 2x^2y^2 - 4xy + 2 - 2 = (x^2 - y^2)^2 + 2(xy - 1)^2 - 2 \geq -2,$$

при чему једнакост важи ако и само ако је $x^2 - y^2 = 0$ и $xy = 1$, тј. за $(x, y) \in \{(1, 1), (-1, -1)\}$.

2. Елементарне функције

4. (а) Поткорена величина мора бити позитивна, па мора бити: $\log_2(x^2 - 5x + 6) - 1 > 0$. То значи да је $x^2 - 5x + 6 > 2$. У том случају је и логаритам дефинисан. Решење ове квадратне неједначине је $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$.

- (б) Да би израз $\ln\left(\log_3 \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x-1}\right)$ био дефинисан, мора бити $\log_3 \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x-1} > 0$, а то ће бити испуњено ако и само ако је $\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x-1} > 1$. Као прво, закључујемо да поткорена величина мора бити позитивна, и одатле следи да је и $x > 1$ (да би цео разломак био позитиван, бројилац и именилац морају бити истог знака). Решавањем једначине $x^2 + 3x + 2 > 0$ добијамо да је $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$, што заједно са условом $x > 1$, даје $x > 1$. Сада је потребно да буде $\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x-1} > 1$. Пошто је $x - 1 > 0$ и леву и десну страну неједнакости смео помножити тим бројем а да се знак неједнакости не промени. Добијамо неједначину $\sqrt{x^2 + 3x + 2} > x - 1$ коју смео и да квадрирамо јер су обе стране позитивне. Долазимо до неједначине $3x + 2 > -2x + 1$, чије је решење $x > -\frac{1}{5}$. Дакле, домен функције f је $(1, +\infty)$.

6. $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right);$

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{2} \cos \alpha + \cos 2\alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - \sqrt{2} \cos \alpha + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \sqrt{2} \cos \alpha (\sqrt{2} \cos \alpha - 1); \\ 2 \sin^2 \alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha - 1 &= 2 \sin^2 \alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sqrt{3} \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = \\ &= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \cos 2\alpha \right) = 2 \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

7. (а) Функција $\arcsin t$ је дефинисана за $t \in [-1, 1]$. Пошто је корен увек позитиван, закључујемо да је $\sqrt{x^2 + x + 1} \leq 1$. Поткорена величина је увек позитивна (дискриминанта је мања од 0), па ову неједначину можемо да квадрирамо без промене знака. Добијамо њој еквивалентну $x^2 + x \leq 0$ чије је решење $x \in [-1, 0]$. Дакле, $D = [-1, 0]$.