

7. Математичка индукција

1. Методом математичке индукције доказати једнакости:

(а) $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2};$
(б) $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$
(в) $\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$

2. Дат је скуп са n елемената. Доказати да је број подскупова са k елемената једнак

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

($n! = 1 \cdot 2 \cdots n$; $0!$ је по дефиницији једнако 1)

3. Доказати следеће особине биномног коефицијента:

(а) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$
(б) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ за $n > 1$.

4. (Њутнова биномна формула) Ако су a и b реални бројеви, а n природан број, доказати да је

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{k} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{k} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

(у последњем изразу сматрамо да је $\binom{n}{0} = 1$).

5. Извести формулу за $\sum_{k=1}^n k^4$ на следићи начин: Помоћу биномне формуле изразити $(n+1)^5 - n^5; n^5 - (n-1)^5; \dots, 1^5 - 0^5$ и добијене изразе сабрати. Затим на десну страну применити добијене формуле из задатка 1.

6. Ако је n природан број, доказати неједнакости:

(а) $2^n > n^2, n \geq 5;$
(б) $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}, n \geq 2;$
(в) (Бернулијева неједнакост) Ако је $a > -1$, тада је $(1+a)^n \geq 1+na$.

7. Доказати да за све природне бројеве n важи:

(а) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2;$
(б) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}, n \geq 9;$