2. Логаритам. Тригонометријске функције.

1. Из дефиниције извести следеће особине логаритма: $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$, $a^{\log_a b} = b$, $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, $\log_b a \cdot \log_a c = \log_b c$, $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$ $(a, b, c > 0)$.

2. Израчунати логаритме: $\log_3 243$, $\log_5 \frac{1}{125}$, $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$, $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$, $\log_{27} 81$ и $\log_{10} \frac{1}{\sqrt{1000}}$.

3. Упростити изразе $\ln \sqrt[4]{\frac{ab^5\sqrt{c^3}}{(a-b)^7}}$, $\ln \frac{\sqrt{ab^3c^5}}{\sqrt[3]{de^2f^5}}$.

4. Одредити домене функција:

   (а) $f(x) = \sqrt{\log_2 (x^2 - 5x + 6) - 1}$;

   (б) $f(x) = \ln \left(\log_3 \frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x-1} \right)$.

5. Користећи адиционе формуле, доказати следеће идентитете:

   (а) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$; $\cos \gamma + \cos \delta = 2 \cos \frac{\gamma+\delta}{2} \cos \frac{\gamma-\delta}{2}$;

   (б) $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \sin \alpha \sin \beta$; $\cos \gamma - \cos \delta = -2 \sin \frac{\gamma+\delta}{2} \sin \frac{\gamma-\delta}{2}$;

   (в) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$; $\sin \gamma + \sin \delta = 2 \sin \frac{\gamma+\delta}{2} \cos \frac{\gamma-\delta}{2}$;

   (г) $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$; $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$;

   (д) $\sin^2 \alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$; $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$;

   (ђ) $\mathrm{tg}\ (\alpha + \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha \mathrm{tg}\beta}$.

6. Написати у облику производа следеће изразе: $\sin x + \cos x$, $2 \sin x - 3 \cos x$, $1 - \sqrt{2} \cos \alpha + \cos 2\alpha$, $2 \sin^2 \alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha - 1$.

7. Одредити области дефинисаности следећих функција:

   (а) $f(x) = \arcsin \sqrt{x^2 + x + 1}$;

   (б) $f(x) = \mathrm{arctg}\ (\arcsin(\ln \frac{x+3}{x+1}))$.