

Теорија

- (3 п.) Нека су дати скупови: $A = \{2, 3, b, d\}$ и $B = \{a, b, 2\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и њихов пресек. Навести пример једне рефлексивне релације на скупу A , као и по пример (барем једне) функције:
(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (2 п.) Дефинисати појам лimesа (граничне вредности) низа. Доказати да конвергентни низ има тачно једну граничну вредност. Навести основну разлику између лimesа и тачке нагомилавања низа. Навести пример низа, ако такав постоји, који има тачно 4 различитих тачака нагомилавања.
- (2 п.) Исказати Болцано – Кошијеву теорему. Дати њену геометријску интерпретацију и навести неке њене последице.
- (3 п.) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме.

Задаци:

- (3 п.) Користећи математичку индукцију доказати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{4n^3 - n}{3}$$

- (2 п.) Израчунати лimes: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 1} \right)^n$
- (4 п.) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+1}{n(n+1)}$
- (4 п.) Испитати непрекидност и одредити тип прекида функције:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt{1-3x}}{x} & , x < 0 \\ \frac{\sin 5x}{x \cos 2x} & , 0 \leq x < \frac{\pi}{5} \\ 0 & , x \geq \frac{\pi}{5} \end{cases}$$

- (2 п.) Израчунати извод функције: $f(x) = e^x x^3 (7x + 1)$

Теорија

1. (3 п.) Дефинисати неодређени интеграл. Формулисати и доказати фундаменталну везу између неодређеног и одређеног интеграла (Њутн-Лајбницова формула).
2. (1.5 п.) Решите, у зависности о реалном парамету α , следећи систем једначина:

$$\begin{aligned}2x + 3y - z &= 1, \\ x + 7y + \alpha z &= -2, \\ x + 2y + 4z &= 9.\end{aligned}$$

3. (1.5 п.) Израчунајте детерминанту:

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 3 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

4. (4 п.) Дефинисати појам линеарног оператора, слике и језгра линеарног оператора. Формулисати и доказати теорему о рангу и дефекту линеарног оператора.

Задаци

1. (2 п.) Израчунати лимес: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{3x^3}$
2. (2 п.) Решити одређен интеграл: $\int_0^1 \frac{t}{t^2 + 2023} dt$
3. (3 п.) Дате су тачке $A(-1, 0, 1)$, $B(2, 3, 1)$ и $C(7, 7, 0)$. Одредити координате тачке D тако да четвороугао $ABCD$ буде паралелограм. Израчунати површину тог паралелограма.
4. (3 п.) Дати су вектори $\vec{a} = (1, -2, 1)$ и $\vec{b} = (p, 1, q)$. Одредити параметре p и q уколико је познато да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ међусобно нормални и да је $\|\vec{b}\| = 5$.
5. (5 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 7}$

Теорија

- (3 п.) Нека су дати скупови: $A = \{5, a, 2, q\}$ и $B = \{a, 2, r\}$. Одредити Декартов производ скупова $A \times B$ и $B \times A$, као и њихов пресек. Навести пример једне симетрична релације на скупу A , као и по пример (барем једне) функције:
(а) $f : A \longrightarrow B$, која је '1 - 1', (б) $g : A \longrightarrow B$, која је 'на', (в) $h : A \longrightarrow A$ која је и '1 - 1' и 'на'.
Ако нека од функција под (а), (б) или (в) не постоји образложити одговор !
- (2 п.) Дефинисати појам реда и суме реда. Доказати неопходан услов конвергенције реда. Дефинисати геометријски и хармонијски ред. Доказати услов конвергенције геометријског реда.
- (2 п.) Исказати Болцано – Кошијеву теорему. Дати њену геометријску интерпретацију и навести неке њене последице.
- (3 п.) Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.

Задаци:

- (3 п.) Математичком индукцијом показати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи: $6 \mid (n + 1)^3 - n^3 - 1$.
- (2 п.) Израчунати лимес: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n-1} - \sqrt[3]{n+1}$.
- (4 п.) Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n-3}{n+3} \right)^{n(n+1)}$.
- (3 п.) Без коришћења Лопиталовог правила израчунати $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\frac{3\pi}{2}x)}{1-\sqrt{x}}$.
- (3 п.) Одредити домен, а потом израчунати извод функције $g(x) = \arcsin \frac{x}{1+x}$.

Теорија

1. (3 п.) Дефинисати појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати фундаменталну везу између неодређеног и одређеног интеграла (Њутн-Лајбницава формула).
2. (2 п.) Решите, у зависности о реалном парамету α , следећи систем једначина:

$$\begin{aligned}x - 2y - z &= 2, \\ 2x + 3y - z &= -1, \\ \alpha x + 2y + 4z &= 3.\end{aligned}$$

3. (2 п.) Израчунајте детерминанту:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -5 & -5 & 6 & 5 \end{vmatrix}.$$

4. (3 п.) Дефинисати појам линеарног оператора, слике и језгра линеарног оператора. Формулисати и доказати теорему о рангу и дефекту линеарног оператора.

Задаци

1. (2 п.) Решити одређен интеграл: $\int_0^3 x^2 e^x dx$.
2. (3 п.) Решити интеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x} - \sqrt[3]{1-3x}}.$
3. (2 п.) Одредити једначину равни која садржи тачку $P(1, 0, 3)$ и нормална је на праву $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{3}.$
4. (3 п.) Дати су вектори $\vec{a} = (r, -1, 1)$ и $\vec{b} = (1, p, q)$. Одредити параметре r , p и q уколико је познато да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ међусобно колинеарни и да је $\|\vec{a}\| = 2$.
5. (5 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x.$

Биоматематика

18. јануар. 2024.

Теорија

- (6 п.) Дефинисати појмове: (а) граничне вредности функције у тачки, (б) левог извода функције у тачки. Формулисати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме.
- (7 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).
- (4 п.) Решите, у зависности о реалном парамету α , следећи систем једначина:

$$\begin{aligned} 3x - y - 2z &= 1 \\ x + 3y + 4z &= 5 \\ 2x - \alpha y + 4z &= -2. \end{aligned}$$

- (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије 5. Дефинисати појам линеарног оператора, $A : V \rightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A . Показати тврђење: $\lambda \in \mathbb{R}$ је сопствена вредност линеарног оператора A ако и само ако је λ нула карактеристичног полинома од A .

Задаци

- (5 п.) Математичком индукцијом показати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи: $3^n \leq (n+2)!$
- (5 п.) Наћи све тачке нагомилавања низа (a_n) , ако је $a_n = \left(\frac{3n^2+1}{2n^2-1}\right)^3 + A \cos(n\pi)$. Одредити вредност A тако да низ (a_n) буде конвергентан.
- (7 п.) Решити интеграл: $\int \frac{x^2+4x-11}{x^3-3x^2+x-3} dx$
- (6 п.) Скицирати и израчунати површину lika у равни ограниченог кривама: $y = x - 1$ и $y = x^2 - 3x - 1$
- (7 п.) Одредити угао под којим се секу праве $p : \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{1}$ и $q : \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$. Навести пример и написати једначину бар једне праве r која сече дате праве p и q .
- (6 п.) Одредити једначину равни α која садржи праву $l : \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-9}{4}$ и паралелна је равни $\beta : x + 6y + z - 4 = 0$. Израчунати растојање тачке $A(2, 1, 3)$ од равни β .

Биоматематика

6. фебруар. 2024.

Теорија

- (7 п.) Дефинисати појмове: (а) непрекидности функције у тачки, (б) извода функције у тачки. Формулисати, доказати и објаснити геометријски смисао Фермаове леме.
- (6 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Навести основна својства неодређеног интеграла и формулисати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).
- (4 п.) Израчунајте детерминанту следеће матрице:

$$A = \begin{vmatrix} x & x & a+x \\ x & a+x & x \\ a+x & a & a \end{vmatrix}.$$

За које вредности од a и x матрица A није регуларна.

- (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије 4. Дефинисати појам линеарног оператора, $A : V \rightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A . Показати тврђење: $\lambda \in \mathbb{R}$ је сопствена вредност линеарног оператора A ако и само ако је λ нула карактеристичног полинома од A .

Задаци

- (5 п.) Математичком индукцијом показати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи: $5 \mid 8^n - 3^n$.
- (6 п.) Испитати непрекидност и одредити тип прекида функције:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{1-3x}-e^{3x}}{x} & , x < 0 \\ 3 & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{\sin(3x-3)}{\tan(x-1)} & , x > 1 \end{cases}$$

- (6 п.) Решити интеграл: $\int \frac{\sqrt{1+7x}}{1-\sqrt[3]{1+7x}} dx$
- (9 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$
- (5 п.) Одредити параметар $p \in \mathbb{R}$ такав да вектор $\vec{a} = p\vec{i} + 2\vec{j} + (1+p)\vec{k}$ заклапа једнаке углове са векторима $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.
- (5 п.) Одредити једначину равни α која садржи тачке $A(-1, 1, 3)$, $B(2, 2, 2)$ и $C(3, 1, 5)$. Колика је површина троугла ABC ?

Биоматематика

11. јун 2024.

Теорија

- (6 п.) Дефинисати појмове: (а) граничне вредности функције у тачки, (б) тачке нагомилавања низа. Формулисати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.
- (7 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).
- (4 п.) Решите, у зависности о реалном парамету α , следећи систем једначина:

$$\begin{array}{rclcl} -x & + & 2y & - & 4z & = & 4 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 4\alpha y & - & z & = & -3. \end{array}$$

- (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије 4. Дефинисати појам линеарног оператора $A: V \rightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A . Нека је A линеарни оператор над V такав да постоји база e од V која се састоји од сопствених вектора оператора A . Докажите да је тада A дијагонализабилан оператор. Да ли важи обрат?

Задаци

- (5 п.) Математичком индукцијом показати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи:

$$1 + 25 + 625 + \dots + 5^{2n-2} = \frac{5^{2n} - 1}{5^2 - 1}$$

- (6 п.) Испитати апсолутну и условну конвергенцију алтернирајућег реда: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n+1}{n^2-3}$

- (6 п.) Решити одређен интеграл: $\int_0^{\pi} \sin(2x) e^{5x} dx$

- (9 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x}$

- (5 п.) Одредити параметар $p \in \mathbb{R}$ такав да вектор $\vec{a} = p\vec{i} + (2-p)\vec{j} + \vec{k}$ заклапа угао од 60° са вектором $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

- (5 п.) Одредити једначину равни α која садржи праву $p: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-7}{3}$ и нормална је на праву $l: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{2}$. Израчунати растојање тачке $A(1, 1, 1)$ од равни α и одредити бар три тачке које припадају равни α .

Биоматематика

24. јун 2024.

Теорија

- (6 п.) Дефинисати појмове: (а) граничне вредности функције у тачки, (б) тачке нагомилавања низа. Формулисати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.
- (7 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).
- (4 п.) Решите, у зависности о реалном парамету α , следећи систем једначина:

$$\begin{aligned} -x + 2y - 4z &= 4 \\ 2x - y + 3z &= 2 \\ x + 4\alpha y - z &= -3. \end{aligned}$$

- (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије 4. Дефинисати појам линеарног оператора $A : V \rightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A . Нека је A линеарни оператор над V такав да постоји база $\mathbf{e}$ од V која се састоји од сопствених вектора оператора A . Докажите да је тада A дијагонализабилан оператор. Да ли важи обрат?

Задаци

- (5 п.) Математичком индукцијом показати да за сваки природан број $n \in \mathbb{N}$ важи: $25 \mid 4 \cdot 6^n + 5n - 4$.
- (6 п.) Одредити параметре a и b тако да функција буде непрекидна:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{ax^2} & , x < 0 \\ \frac{1}{3} & , 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{bx-b} & , x > 1 \end{cases}$$

- (6 п.) Решити одређен интеграл: $\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} \frac{x-5}{x^3-x} dx$
- (9 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{e^{-x}}{x-2}$
- (5 п.) Да ли су тачке $A(1, 2, 0)$, $B(2, 3, 3)$, $C(-3, 1, 4)$ и $D(2, 1, -2)$ компланарне? Уколико нису, израчунати запремину тетраедра $ABCD$.
- (5 п.) Одредити једначину праве p која садржи тачку $A(2, 0)$ и сече праву $q : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-1}{1}$ под углом од $\frac{\pi}{3}$.

Биоматематика

29. август 2024.

Теорија

- (6 п.) Дефинисати појмове: (а) граничне вредности функције у тачки, (б) лimes низа. Формулисати и објаснити геометријски смисао Лагранжове теореме.
- (7 п.) Објаснити појам одређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).
- (4 п.) Израчунајте детерминанту следеће матрице:

$$A = \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}.$$

Ако су a, b, c једнаки 1 за које вредности параметра x матрица A није регуларна.

- (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије 3. Дефинисати појам линеарног оператора $A: V \rightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A .
Нека је A линеарни оператор на V такав да постоји база e од V која се састоји од три сопствена вектора оператора A . Докажите да је тада A дијагонализабилан оператор. Да ли важи обрат?

Задаци

- (5 п.) Користећи математичку индукцију доказати да је за све $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n} - 1$$

- (5 п.) Испитати конвергенцију реда: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{(n^2+3n)}$
- (6 п.) Решити одређен интеграл: $\int_2^e \frac{x^2+1}{x^4-3x^3+3x^2-x} dx$
- (9 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{x^3-3x}{x^2-1}$
- (5 п.) Одредити параметар $p \in \mathbb{R}$ такав да вектор $\vec{a} = p\vec{i} + (1-p)\vec{j} + 2\vec{k}$ заклапа угао од 30° са вектором $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$.
- (6 п.) Одредити пресек правих $p: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z+3}{-2}$ и $q: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+7}{1}$, а потом одредити једначину равни α која их садржи. Израчунати растојање тачке $A(7, 6, 1)$ од равни α .

Биоматематика

19. септембар 2024.

Теорија

- (6 п.) Дефинисати појмове: (а) непрекидности функције у тачки, (б) лимес низа. Формулисати и објаснити геометријски смисао Ролове теореме.
- (7 п.) Објаснити појам неодређеног интеграла. Формулисати и доказати Фундаменталну теорему (Њутн-Лајбницову формулу).
- (4 п.) Решите, у зависности о реалном парамету α , следећи систем једначина:

$$\begin{aligned} -x + 2y - 4z &= 4 \\ x + 3\alpha y - 2z &= 1 \\ 2x - y + 3z &= 2. \end{aligned}$$

- (7 п.) Нека је V реалан векторски простор димензије 4. Дефинисати појам линеарног оператора $A : V \rightarrow V$, сопствене вредности од A и карактеристичног полинома линеарног оператора A .
Нека је A линеарни оператор на V такав да постоји база e од V која се састоји од четири сопствена вектора оператора A . Докажите да је тада A дијагонализабилан оператор. Да ли важи обрат ?

Задаци

- (5 п.) Користећи математичку индукцију доказати да за све $n \in \mathbb{N}$ важи: $6|n(n^2 - 1)$
- (6 п.) Испитати непрекидност и одредити тип прекида функције:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - \sqrt{1-4x}}{x} & , x < 0 \\ 1 & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{\tan(x-1) - \sin(x-1)}{(x-1)^3} & , x > 1 \end{cases}$$

- (6 п.) Скицирати и израчунати површину lika у равни ограниченог кривама: $y = |x|$, $y = (x+2)^2 - 4$, $y \in [-4, 4]$
- (9 п.) Испитати ток и скицирати график функције: $f(x) = \frac{x}{1+\ln x}$
- (5 п.) Дати су вектори $\vec{a} = (-2, 1, r)$ и $\vec{b} = (1, p, q)$. Одредити параметре r , p и q уколико је познато да су вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ међусобно колинеарни и да је $\|\vec{a}\| = 3$.
- (5 п.) Одредити једначину равни α која садржи праву $p : \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z+3}{-2}$ и нормална је на праву $l : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{5}$. Израчунати растојање тачке $A(1, -2, 1)$ од равни α и одредити бар три тачке које припадају равни α .