Tema 3: Aproksimacija jednodimenzionalnog signala pomoću Haarovih talasića

Opis problema

Transformacije talasićima omogućavaju predstavljanje signala pomoću koeficijenata koji opisuju promene na različitim skalama. Haarova transformacija predstavlja jednu od najjednostavnijih ortogonalnih transformacija talasićima. Njenom primenom signal se razlaže na koeficijente aproksimacije i detalja. Zadržavanjem samo dela ovih koeficijenata može se dobiti aproksimacija originalnog signala.

Cilj seminarskog rada je samostalna implementacija direktne i inverzne jednodimenzionalne Haarove transformacije, kao i ispitivanje kvaliteta aproksimacije dobijene zadržavanjem različitog broja talasnih koeficijenata.

Zadaci

1. **Formiranje i prikaz signala.** Posmatrati funkciju $f : [0, 1] \to R$ definisanu izrazom

$$f(t) = \sin(2\pi t) + g(t), \qquad g(t) = \begin{cases} 0.7, & 0.35 \leq t < 0.65, \\ 0.4, & 0.75 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

   Diskretizovati funkciju u $N = 256$ ekvidistantnih tačaka

$$t_i = \frac{i}{256}, \qquad i = 0, 1, \ldots, 255,$$

   i formirati signal $f = (f_0, f_1, \ldots, f_{255})$, gde je $f_i = f(t_i)$. Grafički prikazati dobijeni signal.

2. **Direktna Haarova transformacija.** Za signal parne dužine definisati jedan korak Haarove transformacije pomoću formula

$$a_k = \frac{u_{2k} + u_{2k+1}}{\sqrt{2}}, \qquad d_k = \frac{u_{2k} - u_{2k+1}}{\sqrt{2}}, \qquad k = 0, \ldots, \frac{m}{2} - 1.$$

   U prvoj iteraciji ulazni niz u predstavlja originalni signal. Nakon jednog koraka Haarove transformacije dobijaju se dva niza, niz koeficijenata aproksimacije a i niz koeficijenata detalja d. U svakoj narednoj iteraciji za ulazni niz u uzima se niz koeficijenata aproksimacije a dobijen u prethodnoj iteraciji, dok se koeficijenti detalja d čuvaju. Postupak se ponavlja sve dok se ne dobije jedan koeficijent aproksimacije. Konačni vektor Haarovih koeficijenata sastoji se od poslednjeg aproksimacionog koeficijenta i svih detalja, poređanih od najgrubljeg ka najfinijem nivou.

3. **Inverzna transformacija.** Implementirati inverznu Haarovu transformaciju koristeći relacije

$$u_{2k} = \frac{a_k + d_k}{\sqrt{2}}, \qquad u_{2k+1} = \frac{a_k - d_k}{\sqrt{2}}.$$

   Iz svih dobijenih koeficijenata rekonstruisati originalni signal f^*. Izračunati grešku rekonstrukcije $\|f - f^*\|_2$ i proveriti očuvanje energije

$$\sum_{i=0}^{N-1} f_i^2 = \sum_{i=0}^{N-1} c_i^2,$$

   gde je c vektor koeficijenata direktne Haarove transformacije.

4. **Aproksimacija signala.** Za svaku vrednost

$$M \in \{16, 32, 64, 128\}$$

sačuvati tačno M koeficijenata iz vektora c koji imaju najveće apsolutne vrednosti, a sve preostale koeficijente postaviti na nulu. U slučaju jednakih apsolutnih vrednosti nasumično odabrati koeficijent koji će biti sačuvan. Primenom inverzne transformacije rekonstruisati aproksimaciju $\mathbf{f}^M$. Na odgovarajućim graficima uporediti originalni signal i sve četiri aproksimacije.

5. **Analiza kvaliteta aproksimacije.** Za svaku vrednost M izračunati srednjekvadratnu grešku

$$\mathrm{MSE}(M) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(f_i - f_i^M\right)^2.$$

Rezultate prikazati u tabeli i nacrtati grafik zavisnosti $\mathrm{MSE}(M)$ od broja sačuvanih koeficijenata. Prokomentarisati kako se kvalitet aproksimacije menja sa povećanjem vrednosti M i na kojim delovima signala se najviše primećuju odstupanja.

Implementacija

Nije dozvoljeno korišćenje ugrađenih funkcija i biblioteka koje direktno računaju Haarovu ili druge talasne transformacije. Seminarski se može raditi u Matlabu, Oktavi ili Pajtonu.

Literatura

1. Radunović, D. P. Numeričke metode. 3. izdanje. Akademska misao, Beograd, 2003.
2. G. Peyré, *Numerical Tours: 1-D Haar Wavelets* https://www.numerical-tours.com/matlab/wavelet_1_haar1d/.