Tema 2: Najbolja ravnomerna aproksimacija eksponencijalne funkcije

Opis problema

U brojnim problemima numeričke matematike složena funkcija zamenjuje se polinomom nižeg stepena. Jedan od mogućih kriterijuma kvaliteta aproksimacije jeste najveće apsolutno odstupanje na posmatranom intervalu. Aproksimacija kojom se ovo odstupanje minimizuje naziva se najbolja ravnomerna aproksimacija.

Posmatra se funkcija

$$f(x) = e^{-x}.$$

Za interval $I = [a, b]$ potrebno je odrediti polinom drugog stepena

$$p_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

koji rešava problem

$$\min_{p \in \mathcal{P}_2} \|f - p\|_\infty = \min_{c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \max_{x \in I} \left| e^{-x} - (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) \right|, \tag{1}$$

gde $\mathcal{P}_2$ označava skup polinoma stepena najviše dva. Razmatrati intervale $I_1 = [0, 1]$ i $I_2 = [0, 2]$.

Zadaci

1. **Matematička formulacija.** Definisati funkciju greške

   $$r(x) = f(x) - p_2(x)$$

   i zapisati problem najbolje ravnomerne aproksimacije. Navesti Čebiševljevu teoremu o alternaciji za polinome drugog stepena i objasniti zbog čega su potrebne najmanje četiri tačke alternacije.

2. **Postavljanje uslova alternacije.** Za svaki od intervala $[0, L]$, gde je $L \in \{1, 2\}$, tražiti dve unutrašnje tačke $0 < x_1 < x_2 < L$. Iskoristiti uslove

   $$\begin{aligned} r(0) &= E, \\ r(x_1) &= -E, \\ r(x_2) &= E, \\ r(L) &= -E, \\ r'(x_1) &= 0, \\ r'(x_2) &= 0. \end{aligned}$$

   Formirati odgovarajući sistem od šest nelinearnih jednačina po nepoznatim c_0, c_1, c_2, E, x_1 i x_2. Proveriti da je $|E|$ jednako maksimalnoj apsolutnoj grešci dobijene aproksimacije. Obrazložiti izbor krajnjih tačaka kao tačaka alternacije, koristeći svojstva funkcije e^{-x}.

3. **Numeričko rešavanje.** Numerički rešiti formirani sistem na intervalima $[0, 1]$ i $[0, 2]$. Za oba intervala navesti koeficijente c_0, c_1, c_2, unutrašnje tačke alternacije x_1, x_2 i vrednost $|E|$.

4. **Provera optimalnosti.** Za oba dobijena polinoma numerički ispitati funkciju greške na odgovarajućem intervalu. Odrediti njene ekstremne vrednosti i proveriti da su odstupanja u četiri tačke alternacije jednaka po apsolutnoj vrednosti, sa naizmeničnim znacima.

5. **Grafički prikaz.** Za svaki interval prikazati:
   - funkciju $f(x)$ i dobijeni aproksimacioni polinom $p_2(x)$ na istom grafiku;
   - funkciju greške $r(x)$, sa označenim tačkama alternacije i pravama $y = |E|$ i $y = -|E|$.
6. **Poređenje intervala.** Uporediti maksimalne apsolutne greške na intervalima $[0, 1]$ i $[0, 2]$. Objasniti kako proširivanje intervala utiče na kvalitet najbolje ravnomerne aproksimacije polinomom istog stepena.

Implementacija

Nije dozvoljeno korišćenje gotovih funkcija za najbolju ravnomernu aproksimaciju. Seminarski se može raditi u Matlabu, Oktavi ili Pajtonu.

Literatura

1. Radunović, D. P. Numeričke metode. 3. izdanje. Akademska misao, Beograd, 2003.
2. L. N. Trefethen, Approximation Theory and Approximation Practice, SIAM, 2013.