Tema 1: Kalibracija mernog instrumenta metodom najmanjih kvadrata

Opis problema

Prilikom kalibracije instrumenta za merenje sile (*load cell*) ispituje se zavisnost pomeranja ili deformacije instrumenta od primenjenog opterećenja. Zbog grešaka merenja i osobina instrumenta, eksperimentalne tačke ne moraju da leže tačno na jednoj krivoj. Potrebno je odrediti funkciju koja dovoljno dobro opisuje ovu zavisnost.

Američki Nacionalni institut za standarde i tehnologiju (NIST) objavio je skup *Pontius*, zasnovan na stvarnim kalibracionim merenjima. Skup sadrži $n = 40$ parova (x_i, y_i), gde je x_i primenjeno opterećenje, a y_i izmereno pomeranje instrumenta. Za svaku od 20 vrednosti opterećenja postoje po dva merenja.

Izvor podataka: https://www.itl.nist.gov/div898/strd/lls/data/Pontius.shtml

Direktna datoteka: https://www.itl.nist.gov/div898/strd/lls/data/LINKS/DATA/Pontius.dat

U datoteci se na početku nalaze opis i sertifikovane vrednosti. Sami podaci se nalaze u poslednjih 40 redova. Redosled kolona podataka je y, pa x, što treba uzeti u obzir pri učitavanju.

Zadaci

1. **Učitavanje i grafički prikaz.** Učitati svih 40 parova eksperimentalnih podataka i grafički prikazati zavisnost izmerenog pomeranja od primenjenog opterećenja. Ukratko opisati uočenu zavisnost.

2. **Linearna aproksimacija:** Odrediti koeficijente a_0, a_1 linearne aproksimacije
$$p_1(x) = a_0 + a_1 x, \qquad \min_{a_0,a_1} \sum_{i=1}^{40} \big(y_i - p_1(x_i)\big)^2.$$

3. **Kvadratna aproksimacija.** Odrediti koeficijente b_0, b_1, b_2 kvadratne aproksimacije
$$p_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2, \qquad \min_{b_0,b_1,b_2} \sum_{i=1}^{40} \big(y_i - p_2(x_i)\big)^2.$$

4. **Poređenje modela.** Za oba modela izračunati
$$\mathrm{SSE} = \sum_{i=1}^{40} (y_i - p(x_i))^2, \qquad \mathrm{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} (y_i - p(x_i))^2}.$$
Na jednom grafiku prikazati merenja i obe aproksimacije. Na drugom grafiku prikazati odstupanja $r_i = y_i - p(x_i)$ za obe aproksimacije.

5. **Uticaj skaliranja.** Ponoviti kvadratnu aproksimaciju uz zamenu promenljive $t = x/10^6$, tj. $q(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$. Uporediti dobijene predviđene vrednosti i greške sa aproksimacijom po promenljivoj x. Objasniti zašto skaliranje može biti korisno pri numeričkom računanju. Navesti vezu između koeficijenata b_j i c_j.

6. **Provera i zaključak.** Na stranici NIST-a pronaći referentne vrednosti koeficijenata kvadratne aproksimacije i uporediti ih sa dobijenim rezultatima. Prokomnetarisati eventualna odstupanja. Na osnovu sprovedene analize zaključiti koji polinom bolje opisuje eksperimentalne podatke i objasniti uticaj skaliranja na numeričku stabilnost postupka.

Implementacija

Potrebno je samostalno implementirati metodu najmanjih kvadrata i rešavanje linearinh sistema, nije dozvoljeno korišćenje ugrađenih funkcija. Seminarski se može raditi u Matlabu, Oktavi ili Pajtonu.

Literatura

1. Radunović, D. P. Numeričke metode. 3. izdanje. Akademska misao, Beograd, 2003.
2. NIST/ITL, *Statistical Reference Datasets: Pontius – Load Cell Calibration*, https://www.itl.nist.gov/div898/strd/lls/data/Pontius.shtml.
3. NIST, *Certified Values for Pontius*, dostupno preko veze "Certified Values" na prethodnoj stranici.