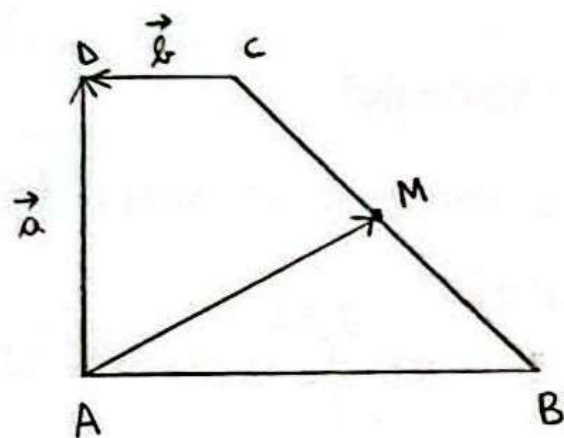


1. Дат је правоугли трапез $ABCD$ где су AB и CD основице, а AD краћи крак. Основица AB је три пута дужа од основице CD . Ако је $\vec{AD} = \vec{a}$ и $\vec{CD} = \vec{b}$, а тачка M средиште крака BC
- а) Изражити вектор $\vec{AM}$ преко вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



$$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = -3\vec{b} + \vec{BM}$$

$$\uparrow$$

$$AB = 3 \cdot CD$$

$$\vec{AB} = -3\vec{CD} = -3\vec{b}$$

$$\vec{AM} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CM} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{CM}$$

$$\oplus \quad 2 \cdot \vec{AM} = \vec{a} - 4\vec{b} + \vec{BM} + \vec{CM}$$

Супротни
вектори

$$2\vec{AM} = \vec{a} - 4\vec{b} + \vec{0}$$

$$2\vec{AM} = \vec{a} - 4\vec{b}$$

$$\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\Rightarrow \vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}$$

Ako je $\|\vec{a}\|=3$ и $\|\vec{b}\|=2$, изрaчунати $\|\vec{AM}\|$, $\angle BAM$ и површину ΔABM .

$$\textcircled{*} \quad \|\vec{AM}\| = \sqrt{\vec{AM} \cdot \vec{AM}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}\right)} = \sqrt{\frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{a} - \underset{0}{\vec{a} \cdot \vec{b}} - \underset{0}{\vec{b} \cdot \vec{a}} + 4\vec{b} \cdot \vec{b}} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \|\vec{a}\|^2 + 4 \cdot \|\vec{b}\|^2} =$$

$\vec{a} \perp \vec{b}$ јер је $AB \perp BC$
код правоуглог трапеза $ABCD$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 3^2 + 4 \cdot 2^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 16} = \sqrt{\frac{9+64}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{2}$$

$$\cos \angle BAM = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AM}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AM}\|} = \frac{-3\vec{b} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} - 2\vec{b}\right)}{\| -3\vec{b} \| \cdot \frac{\sqrt{73}}{2}} = \frac{6\|\vec{b}\|^2}{3 \cdot \|\vec{b}\| \cdot \frac{\sqrt{73}}{2}} = \frac{2\|\vec{b}\|}{\frac{\sqrt{73}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{73}} = \frac{8\sqrt{73}}{73} \Rightarrow \angle BAM = \arccos \frac{8\sqrt{73}}{73}$$

I начин

$$P_{ABM} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AM}\| = \frac{1}{2} \|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{AM}\| \cdot \sin \angle BAM = \frac{1}{2} \cdot \| -3\vec{b} \| \cdot \frac{\sqrt{73}}{2} \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAM} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{73}}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{64}{73}} = \frac{3\sqrt{73}}{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{73}} =$$

$\angle BAM$ је оштар

$$= \frac{3\sqrt{73} \cdot 3}{2\sqrt{73}} = \frac{9}{2}$$

II начин

$$P_{ABCD} = \frac{\|\vec{AB}\| + \|\vec{CD}\|}{2} \cdot \|\vec{AD}\| = \frac{\| -3\vec{b} \| + \|\vec{b}\|}{2} \cdot \|\vec{a}\| = \frac{3 \cdot 2 + 2}{2} \cdot 3 = \frac{6+2}{2} \cdot 3 = \frac{8}{2} \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

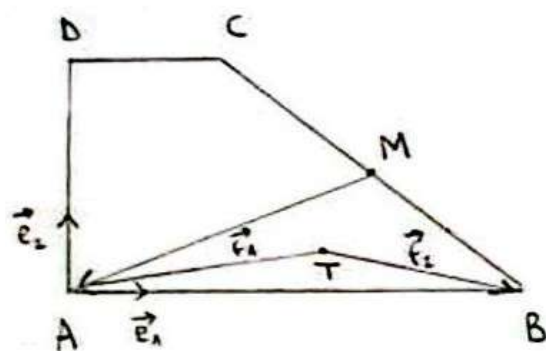
$$P_{ACD} = \frac{\|\vec{AD}\| \cdot \|\vec{CD}\|}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

$$P_{ABC} = P_{ABCD} - P_{ACD} = 12 - 3 = 9$$

$$P_{AMC} = \frac{1}{2} \|\vec{AM} \times \vec{MC}\| = \frac{1}{2} \| -\vec{AM} \times \vec{MC} \| = \frac{1}{2} \|\vec{AM} \times \vec{MB}\| = P_{ABM} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{2} \|\vec{AM} \times \vec{MC}\|} \right\} \Rightarrow P_{ABM} = \frac{P_{ABC}}{2} = \frac{9}{2}$$

- 8) У равни трапеца ABCD избрана су два афина репера: репер Axy са почетком у тачки A и координатним векторима $\vec{e}_1 = \frac{1}{6}\vec{AB}$ и $\vec{e}_2 = \frac{1}{3}\vec{AD}$ и репер $Tx'y'$ са почетком у тежишту T троугла ABM и координатним векторима $\vec{f}_1 = \vec{TA}$ и $\vec{f}_2 = \vec{TB}$. Изразити координате (x, y) преко координата (x', y') .

(*)



$$T \text{ је тежиште } \triangle ABM \Rightarrow \vec{AT} = \frac{1}{3}(\vec{AA} + \vec{AB} + \vec{AM}) = \frac{1}{3}(6\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2 + 4\vec{e}_1)$$

$$= \frac{1}{3}(10\vec{e}_1 + \frac{2}{3}\vec{e}_2) = \frac{10}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_2$$

$$\vec{AM} \stackrel{a)}{=} \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{1}{2} \cdot 6\vec{e}_1 + \frac{1}{2} \cdot 3\vec{e}_2 = 3\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\vec{e}_2$$

Да бисмо нашли матрицу преласка с базе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ на базу $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ изражавамо нове базе векторе преко старих.

$$\vec{f}_1 = \vec{TA} = -\vec{AT} = -\frac{10}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2$$

$$\vec{f}_2 = \vec{TB} = \vec{TA} + \vec{AB} = -\frac{10}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 + 6\vec{e}_1 = \frac{8}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2$$

Матрица преласка с базе $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ на базу $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ је $\begin{pmatrix} -\frac{10}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Тражена веза координата (x, y) и (x', y') је

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2) а) Одредити једначину равни α која са равни $\beta: 4x+y+8z-12=0$ образује угао $\frac{\pi}{4}$ и садржи праву $p: x=2, y+1=z$.

б) Одредити формуле хомотетије са центром у тачки $S(-1,0,1)$ и коефицијентом -3 , као и слику равни α при овој хомотетији.

* а) $\alpha: ax+by+cz+d=0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha=(a,b,c)$
 $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \cos \angle(\alpha, \beta) = |\cos \angle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)| = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|} = \frac{|(a,b,c) \cdot (4,1,8)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{4^2+1^2+8^2}} = \frac{|4a+b+8c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{81}} = \frac{|4a+b+8c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot 9}$
 $\beta: 4x+y+8z-12=0 \Rightarrow \vec{n}_\beta=(4,1,8)$
 $4^2+1^2+8^2=16+1+64=81=9^2$

$$9\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 2 \cdot |4a+b+8c| \quad / : 1^2$$

$$81 \cdot 2(a^2+b^2+c^2) = 4 \cdot (4a+b+8c)^2 \quad / : 4$$

$$\frac{81}{2}(a^2+b^2+c^2) = (4a+b+8c)^2 \quad (1)$$

$$p: x=2, y+1=z \Rightarrow p: \frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \vec{u}_p = (0,1,1) \quad P(2,-1,0) \in p \Rightarrow P \in \alpha \Rightarrow a \cdot 2 + b \cdot (-1) + c \cdot 0 + d = 0$$

$$p \subset \alpha \Rightarrow \vec{u}_p \perp \vec{n}_\alpha \Rightarrow \vec{u}_p \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \Rightarrow (0,1,1) \cdot (a,b,c) = 0 \Rightarrow b+c=0 \Rightarrow c=-b \quad (2) \leadsto (1)$$

$$\frac{81}{2}(a^2+b^2+(-b)^2) = (4a+b-8b)^2$$

$$\frac{81}{2}(a^2+2b^2) = (4a-7b)^2$$

$$\frac{81}{2}a^2 + 81b^2 = 16a^2 - 56ab + 49b^2$$

$$\frac{81-32}{2}a^2 + 56ab + 81b^2 - 49b^2 = 0$$

$$\frac{49}{2}a^2 + 56ab + 32b^2 = 0 \quad / \cdot 2$$

$$49a^2 + 112ab + 64b^2 = 0$$

Ако су $b=0$, онда су било $49a^2 + 112a \cdot 0 + 64 \cdot 0^2 = 0$

$$49a^2 = 0$$

$$a = 0$$

$$c \stackrel{(3)}{=} -b = -0 = 0$$

$$d \stackrel{(2)}{=} -2a + b = -2 \cdot 0 + 0 = 0$$

$\alpha: 0=0$ $\frac{1}{2}$ јер то није једначина равни

$$\Rightarrow b \neq 0$$

$$49a^2 + 112ab + 64b^2 = 0 \quad / : b^2 \neq 0$$

$$49 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 112 \frac{a}{b} + 64 = 0$$

$$\text{Смена } t = \frac{a}{b}$$

$$49t^2 + 112t + 64 = 0$$

$$(7t + 8)^2 = 0$$

$$7t + 8 = 0$$

$$7t = -8$$

$$t = -\frac{8}{7} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{8}{7} \Rightarrow a = -\frac{8}{7}b$$

$$c \stackrel{(3)}{=} -b$$

$$d \stackrel{(1)}{=} -2a + b = \frac{16}{7}b + b = \frac{23}{7}b$$

$$\alpha: ax + by + cz + d = 0$$

$$-\frac{8}{7}bx + by - bz + \frac{23}{7}b = 0 \quad / \cdot \frac{7}{b}$$

$$-8x + 7y - 7z + 23 = 0$$

Тражена равна α је $-8x + 7y - 7z + 23 = 0$.

8) Хомотетија $\mathcal{H}_{S,-3}$ са центром $S(-1,0,1)$ и коефицијентом -3 пресликава тачку S у себе, а произвољну тачку $T(x,y,z)$ различиту од S у тачку $T'(x',y',z')$ такву да је $\vec{ST'} = -3\vec{ST}$.

$$[T'] - [S] = -3 \cdot ([T] - [S])$$

$$(x', y', z') - (-1, 0, 1) = -3 \cdot (x, y, z) - (-1, 0, 1)$$

$$(x'+1, y', z'-1) = -3(x+1, y, z-1)$$

$$x'+1 = -3x-3$$

$$x' = -3x-4$$

$$y' = -3y$$

$$\Rightarrow y' = -3y$$

$$z'-1 = -3z+3$$

$$z' = -3z+4$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha: -8x+7y-7z+23=0 \Rightarrow \vec{n}_\alpha = (-8, 7, -7) \quad P(2, -1, 0) \in \alpha \Rightarrow P' = \mathcal{H}_{S,-3}(P) \in \mathcal{H}_{S,-3}(\alpha) = \alpha'$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P'(-10, 3, 4) \in \alpha'$$

$$\mathcal{H}_{S,-3}(\alpha) = \alpha' \Rightarrow \vec{n}_{\alpha'} = (-8, 7, -7)$$

↑

Хомотетија је пресликавање које раван пресликава у њој паралелну раван.

$$\Rightarrow \alpha': -8(x-(-10))+7(y-3)+(-7)(z-4)=0$$

$$-8(x+10)+7y-21-7z+28=0$$

$$-8x-80+7y-7z+7=0$$

$$\boxed{-8x+7y-7z-73=0}$$

3. Одредити једначину параболе која је одређена теменом $T(-2, 1)$ и жижом $F(-3, 0)$. Скицирати слику.

* Оса симетрије параболе је права која садржи теме

$T(-2, 1)$ и жижу $F(-3, 0)$. Њен вектор правца је

$$\vec{FT} = [T] - [F] = (-2, 1) - (-3, 0) = (-2 + 3, 1 - 0) = (1, 1).$$

$$\sigma: \frac{x - (-3)}{1} = \frac{y - 0}{1} \quad \text{тј.} \quad \sigma: \frac{x + 3}{1} = \frac{y}{1} \Rightarrow \vec{u}_\sigma = (1, 1)$$

Директриса d параболе је нормална на осу σ

те је њен вектор правца $\vec{u}_d = (-1, 1)$.

Означимо са $A(x_A, y_A)$ пресечну тачку осу σ

и директрисе d .

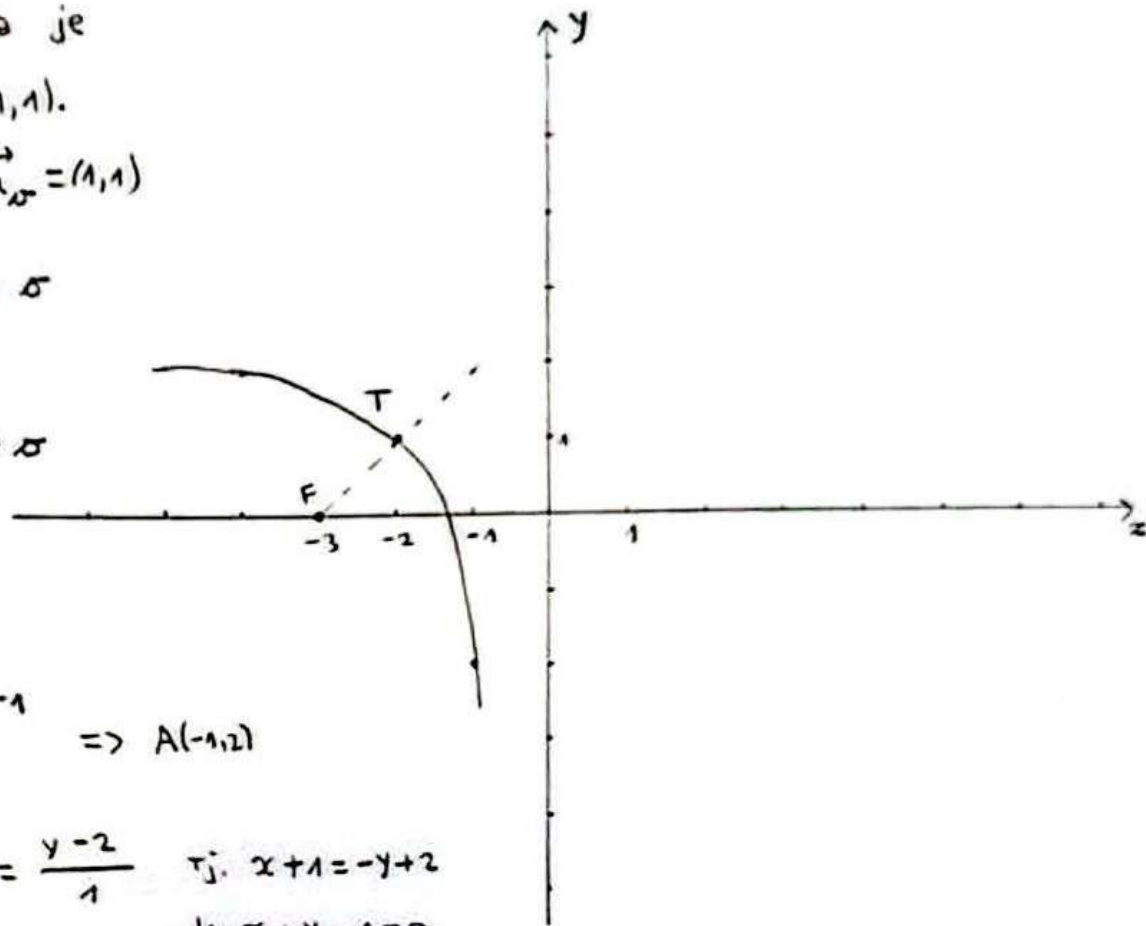
Теме T параболе је средиште дужи AF .

$$-2 = x_T = \frac{x_A + x_F}{2} = \frac{x_A - 3}{2} \Rightarrow x_A - 3 = -4 \Rightarrow x_A = -1$$

$$\Rightarrow A(-1, 2)$$

$$1 = y_T = \frac{y_A + y_F}{2} = \frac{y_A + 0}{2} \Rightarrow y_A = 2$$

$$\Rightarrow \text{Једначина директрисе } d \text{ је } \frac{x - (-1)}{-1} = \frac{y - 2}{1} \quad \text{тј.} \quad x + 1 = -y + 2$$
$$d: x + y - 1 = 0$$



За сваку тачку $P(x, y)$ са параболе важи да је растојање до

жиже $F(-3, 0)$ једнако растојању до директрисе $d: x + y - 1 = 0$.

$$d(P, F) = d(P, d)$$

$$\sqrt{(x - (-3))^2 + (y - 0)^2} = \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \quad / ()^2$$

$$(x+3)^2 + y^2 = \frac{(x+y-1)^2}{2}$$

$$2 \cdot (x^2 + 6x + 9 + y^2) = x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y$$

$$2x^2 + 12x + 18 + 2y^2 - x^2 - y^2 - 1 - 2xy + 2x + 2y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2xy + 14x + 2y + 17 = 0 \text{ је тражена једначина параболе}$$

4. Свести једначину површи $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 4z^2 - 13 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле трансформације и назив површи.

* $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 4z^2 - 13 = 0 \Rightarrow a_{11}=3 \quad a_{12}=\frac{8}{2}=4 \quad a_{22}=-3 \quad a_{33}=-4 \quad a_{44}=-13 \quad a_{13}=0 \quad a_{23}=0$

Матрица A придружена површи $3x^2 + 8xy - 3y^2 - 4z^2 - 13 = 0$ је $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{3+3} \cdot (-4-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (-4-\lambda) \cdot ((3-\lambda)(-3-\lambda) - 4^2) = (-4-\lambda)(-9-3\lambda+3\lambda+\lambda^2-16)$$

$$= (-4-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 25) = -(\lambda+4)(\lambda-5)(\lambda+5)$$

Сопствене вредности су решења једначине $-(\lambda+4)(\lambda-5)(\lambda+5)=0$, тј. $\lambda_1=5, \lambda_2=-5, \lambda_3=-4$

1° $\lambda=5$

$$\begin{pmatrix} 3-5 & 4 & 0 \\ 4 & -3-5 & 0 \\ 0 & 0 & -4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2u + 4v = 0 \Rightarrow 2u = 4v \Rightarrow u = 2v$$

$$4u - 8v = 0 \Rightarrow 4u = 8v \Rightarrow u = 2v$$

$$-9w = 0 \Rightarrow w = 0$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2v \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\| (2, 1, 0) \| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Бирамо јединични сопствени вектор

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$2^\circ \lambda = -5$$

$$\begin{pmatrix} 3-(-5) & 4 & 0 \\ 4 & -3-(-5) & 0 \\ 0 & 0 & -4-(-5) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$8u + 4v = 0 \Rightarrow 4v = -8u \Rightarrow v = -2u$$

$$4u + 2v = 0 \Rightarrow 2v = -4u \Rightarrow v = -2u$$

$$w = 0$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ -2u \\ 0 \end{pmatrix} = u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\| (1, -2, 0) \| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

Бирамо јединични сопствени вектор

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$3^\circ \lambda = -4$$

$$\begin{pmatrix} 3-(-4) & 4 & 0 \\ 4 & -3-(-4) & 0 \\ 0 & 0 & -4-(-4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 7u + 4v = 0 \\ 4u + v = 0 \end{array} \xrightarrow{1 \cdot 4} \begin{array}{l} 7u + 4v = 0 \\ 16u + 4v = 0 \end{array}$$

$$0 = 0$$

$$\begin{array}{l} 9u = 0 \\ u = 0 \end{array} \Rightarrow v = -4u = -4 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = w \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Бирамо јединични сопствени вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Одобрани јединични сопствени вектори чине колоне ортогоналне матрице R такве да је $R^T B R$ дијагонална матрица. Уводимо нови Декартов правоугли координатни систем $o'x'y'z'$ такав да је

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \text{ где је } R = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

У координатном систему $O'x'y'z'$ матрица коефицијената површи је

$$A' = R_1^T A R_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{\sqrt{5}} & \frac{5}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ -\frac{5}{\sqrt{5}} & \frac{10}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

Зато површ у координатном систему $O'x'y'z'$ има једначину $5x'^2 - 5y'^2 - 4z'^2 - 13 = 0$

$$5x'^2 - 5y'^2 - 4z'^2 = 13 \quad | :13$$

$$\frac{x'^2}{\frac{13}{5}} - \frac{y'^2}{\frac{13}{5}} - \frac{z'^2}{\frac{13}{4}} = 1 \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{y'^2}{\left(\sqrt{\frac{13}{5}}\right)^2} + \frac{z'^2}{\left(\sqrt{\frac{13}{4}}\right)^2} - \frac{x'^2}{\left(\sqrt{\frac{13}{5}}\right)^2} = -1$$

Уводимо нови Декартов правоугли координатни систем $O''x''y''z''$ такав да је $x''=z'$, $y''=y'$, $z''=x'$, те је једначина површи $\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{13}{5}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{13}{4}}\right)^2} - \frac{z''^2}{\left(\sqrt{\frac{13}{5}}\right)^2} = -1$, односно на основу теорије о класификацији површи другог реда у питању је дводелни хиперболоид.

Формуле трансформације су

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z'' \\ y'' \\ x'' \end{pmatrix}$$

Tj.

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}} y'' + \frac{2}{\sqrt{5}} z''$$

$$y = -\frac{2}{\sqrt{5}} y'' + \frac{1}{\sqrt{5}} z''$$

$$z = x''.$$

5. Сферни троугао ABC на сфери $x^2+y^2+z^2=1$ има углове $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$, $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$ и страницу $\widehat{AB} = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{3})$.
Одредити све странице и углове тог троугла, као и његову површину.

* На основу дуалне косинусне теореме је

$$-\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma, \text{ где је } \alpha = \widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}, \beta = \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}, \gamma = \widehat{ACB}, \angle = \widehat{AB} = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$-\cos \gamma = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{2} \cos(\arccos \frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$-\cos \gamma = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$-\cos \gamma = -\frac{1}{2}$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{2}, \gamma \in (0, \pi)$$

$$\boxed{\gamma = \frac{\pi}{3}}$$

$\Rightarrow$ Углови тог троугла су $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{3}$ и $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Површина тог троугла је $P = \alpha + \beta + \gamma - \pi$

$$P = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} - \pi$$

$$P = \frac{2\pi + 3\pi}{6} + \frac{\pi - 3\pi}{3}$$

$$P = \frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}$$

$$P = \frac{5\pi - 4\pi}{6}$$

$$\boxed{P = \frac{\pi}{6}}$$

Како је $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{3}$ и наспрам једнаких углова у сферном троуглу су једнаке странице, то је

$\widehat{AC} = \widehat{BC} = \widehat{AB} = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{3})$. Остало је још да израчунамо страницу $\ell = \widehat{AC}$, што можемо учинити помоћу дуалне косинусне теореме.

$$-\cos \beta = \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \cos \ell$$

$$-\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} \cos \ell$$

$$-0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \ell$$

$$\frac{3}{4} \cos \ell = \frac{1}{4}$$

$$\cos \ell = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\ell = \arccos \frac{1}{3}}$$