

# Геометрија 2

- задаци са вежби и мало теорије -

Димитрије Шпадијер

7. јануар 2017.

## Садржај

|   |                                   |     |
|---|-----------------------------------|-----|
| 1 | Подударност                       | 2   |
| 2 | Сличност                          | 33  |
| 3 | Конструктивни задаци              | 70  |
| 4 | Инверзија                         | 125 |
| 5 | Изометријске трансформације равни | 134 |
| 6 | Поенкареов диск модел             | 138 |
| 7 | Стереометрија                     | 143 |

# 1 Подударност

Појам подударности познат нам је још од раније. На пример, два троугла  $\triangle ABC$  и  $\triangle A'B'C'$  су подударна ако имају исти облик и величину. Међутим, то није добра дефиниција, јер ми не знамо ни шта је то облик ни шта је то величина троугла. Зато морамо пробати да видимо како још можемо схватити подударност троуглоца. Ако узмемо један од њих, нпр.  $\triangle ABC$  и померамо га све док се у потпуности не преклопи са другим, онда је јасно да су они подударни. Али, шта значи то да га померамо? Ни ово није прецизна дефиниција, а научили смо да у математици мора све строго да се дефинише. Ово препуштамо теорији, а овде ћемо подразумевати да нам је подударност троуглова дефинисана и као појам у потпуности јасна.

Две дужи сматрали смо подударним ако имају исту дужину. Међутим, поново имамо проблем, јер ми нисмо строго дефинисали шта је то дужина дужи. Али, на нашу срећу, подударност дужи можемо дефинисати и без појма дужине, а и то ћемо препустити теорији. Овде ћемо само направити малу дискусију око тога да ли морамо за две подударне дужи  $AB$  и  $A'B'$  писати  $AB \cong A'B'$  или можемо, као што смо се навикли, писати  $AB = A'B'$  (ту сматрамо да су дужине дужи  $AB$  и  $A'B'$  једнаке). У суштини, строго формално гледано, запис  $AB = A'B'$  означава да су дужи  $AB$  и  $A'B'$  једнаке као скупови тачака, тј. да се те две дужи састоје из истих тачака. Тада су оне идентичне. Међутим, ми не желимо да се ограничимо само на тај случај, па ћемо усвојити договор да када напишемо да је  $AB = A'B'$ , то значи да су дужи  $AB$  и  $A'B'$  *подударне*, а не *идентичне*, тј. једнаке као скупови тачака.

Слично, за два угла  $\angle POQ$  и  $\angle P'O'Q'$  сматрамо да су подударни ако имају исту меру у степенима или радијанима. На пример, ако оба угла имају меру  $60^\circ$ , тј.  $\frac{\pi}{3}$ , онда су они подударни. Поново имамо исти проблем, јер нисмо строго дефинисали шта је то мера угла. Али, меру угла ћемо прецизно дефинисати у теорији, тј. на предавањима, а овде ћемо сматрати да нам је мера угла дефинисана и јасна као појам. Такође, кад су ознаке за подударност углова у питању, строго формално значење израза  $\angle POQ = \angle P'O'Q'$  јесте да се ти углови поклапају као скупови тачака, тј. да су идентични, а како ми не желимо да се ограничимо само на тај случај, сматраћемо да тај израз значи да су им мере једнаке, а самим тим и да су подударни. Дакле, слободно можемо писати да је  $\angle POQ = \angle P'O'Q'$  уместо  $\angle POQ \cong \angle P'O'Q'$ .

Подсетимо се сада Ставова о подударности троуглова. Јасно нам је да два подударна троугла имају међусобно подударне одговарајуће стране и углове. Обратно, за два троугла  $\triangle ABC$  и  $\triangle A'B'C'$  довољно је

доказати само за нека три пара страница или углова да су подударни. Ставови који се доказују у теорији и који дају ове довољне услове за подударност два троугла зову се Ставови о подударности троуглова. Има их пет и сада ћемо их навести.

Нека су дати троуглови  $\triangle ABC$  и  $\triangle A'B'C'$ . Ако важи нешто од следећег:

1° (СУС)  $AB = A'B'$ ,  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ ,  $AC = A'C'$ ;

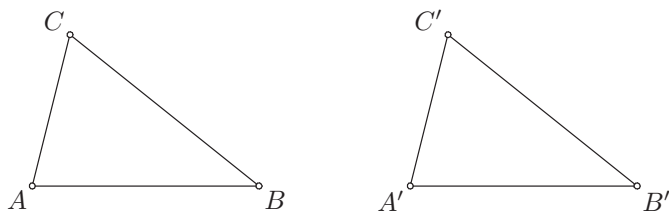
2° (ССС)  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ ,  $BC = B'C'$ ;

3° (УСУ)  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ ,  $AB = A'B'$ ,  $\angle ABC = \angle A'B'C'$ ;

4° (ССУ)  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$ ,  $\angle ACB = \angle A'C'B'$ , а углови  $\angle ABC$  и  $\angle A'B'C'$  су оба оштра, оба права или оба тупа;

5° (УУС)  $AB = A'B'$ ,  $\angle ACB = \angle A'C'B'$ ,  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ ;

онда је  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ .



Дакле, сваки од ставова 1°–5° еквивалентан је са подударношћу троуглова  $\triangle ABC$  и  $\triangle A'B'C'$ .

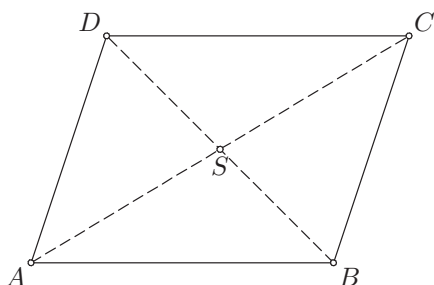
Приметимо да већ код троуглова не можемо тек тако писати знак „=” уместо знака „ $\cong$ ”. Код дужи и углова се то може толерисати, јер се ту уместо једнакости скупова тачака мисли на једнакост дужина дужи, односно мера углова. Међутим, одговарајућа мера за троуглове је површина, а два троугла која имају исту површину не морају бити подударна. Заиста, ако узмемо два троугла која имају исту основицу и висину, од чега је један оштроугли, а други тупоугли, онда је јасно да они нису подударни, а имају исту површину.

Вратимо се сада на Ставови о подударности троуглова. На први поглед нам се може учинити да су ставови УСУ и УУС исти, јер уколико су нама позната нека два угла троугла, познат нам је и трећи због тога што је збир углова у троуглу једнак  $180^\circ$ , односно  $\pi$ . И то је потпуно тачно. Но, застанимо овде за тренутак. На овом предмету се изучавају две геометрије, еуклидска и хиперболичка. Еуклидска геометрија је стандардна, уобичајена геометрија с којом се сусрећемо још у основној школи, а о хиперболичкој геометрији ћемо учити касније. За сада ћемо рећи да се испоставља да ће у хиперболичкој геометрији збир углова у троуглу увек бити мањи од  $\pi$  и да тај збир може бити било који број између 0 и  $\pi$ . Из тог разлога се ова два става и наводе одвојено, јер ће

у хиперболичкој геометрији ово бити два потпуно одвојена и независна става о подударности троуглова.

Осим ставова о подударности троуглова, користићемо једно веома моћно тврђење везано за паралелограм. Најпре дајмо дефиницију паралелограма.

**Дефиниција 1.** Четвороугао  $ABCD$  је *паралелограм* ако је  $AB \parallel CD$  и  $AD \parallel BC$ .

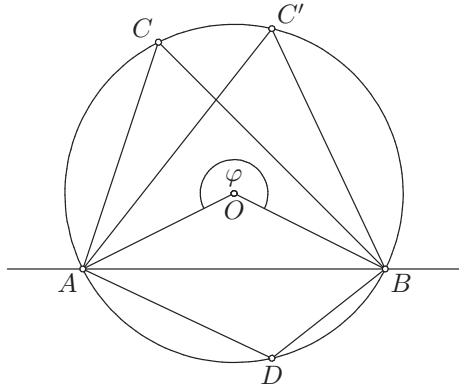


**Теорема 1.** Нека је у равни даи конвексан четвороуџао  $ABCD$ . Следећа тврђења су еквивалентна.

- 1° Четвороуџао  $ABCD$  је паралелограм.
- 2° Свака два суседна уџа четвороуџла  $ABCD$  су суплементна.
- 3° Парови наспрамних уџлова четвороуџла  $ABCD$  су парови подударних уџлова.
- 4°  $AB \parallel CD$  и  $AB = CD$
- 5°  $AB = CD$  и  $AD = BC$
- 6° Дијагонала  $AC$  и  $BD$  имају заједничко средиште.

Ову теорему нећемо доказивати. Подсетимо се сада централних и периферијских углова.

**Дефиниција 2.** Нека је  $k$  круг, нека је  $O$  његов центар и нека су  $A, B, C$  тачке са тог круга. Угао  $\angle ACB$  зове се *периферијски уџао*, а угао  $\angle AOB$  зове се *централни уџао*.



Ако су тачке  $C$  и  $O$  са исте стране праве  $AB$ , онда знамо да је  $\angle AOB = 2\angle ACB$ . Зато се у том случају каже да централни угао  $\angle AOB$  одговара периферијском углу  $\angle ACB$ . С тим у вези, ако је  $C'$  нека друга тачка на кругу  $k$  таква да су  $C, C', O$  с исте стране праве  $AB$ , онда из  $\angle AOB = 2\angle ACB$  и  $\angle AOB = 2\angle AC'B$  следи да је  $\angle ACB = \angle AC'B$ . За периферијске углове  $\angle ACB$  и  $\angle AC'B$  каже се да су над истим луком или над истом тетивом (у овом случају, луком  $\widehat{AB}$ , односно тетивом  $AB$ ). Међутим, ако је  $D$  тачка на кругу  $k$  која се са супротне стране праве  $AB$  од тачака  $C, C', O$ , онда неће бити  $\angle ADB = \angle ACB$ . Разлог је тај што његов одговарајући централни угао није угао  $\angle AOB$ . У ствари, његов централни угао је на слици означен са  $\varphi$  и представља допуну угла  $\angle AOB$  до пуног угла. И у овом случају важи да је одговарајући централни угао два пута већи од периферијског, дакле  $\varphi = 2\angle ADB$ . Израчунајмо колики је угао  $\angle ADB$ . Како је пун угао једнак  $2\pi$ , следи да је  $\angle AOB + \varphi = 2\pi$ , па је  $\varphi = 2\pi - \angle AOB = 2\pi - 2\angle ACB$ . Одавде закључујемо да је  $\angle ADB = \pi - \angle ACB$ .

Приметимо да периферијски углови  $\angle ACB$  и  $\angle ADB$  нису над истим луком, јер је угао  $\angle ACB$  над луком  $\widehat{ADB}$ , док је угао  $\angle ADB$  над луком  $\widehat{ACB}$ . Формулишимо теорему.

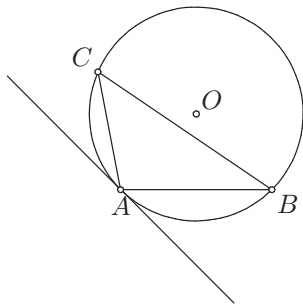
**Теорема 2.** *Периферијски улови над истим луком су међусобно подударни. Периферијски улови над истом тетивом су или подударни или суплементарни улови.*

Важи и обротно. Наиме, нека су у равни дате тачке  $A, B, C$  на кругу  $k$  и тачка  $C'$  за коју не знамо да ли је на кругу. Уколико су  $C, C'$  са исте стране праве  $AB$  и  $\angle ACB = \angle AC'B$  или уколико су  $C, C'$  са супротних страна праве  $AB$  и  $\angle ACB + \angle AC'B = \pi$ , следи да  $C' \in k$ .

Ако су тачке  $A, B$  са круга  $k$  такве да је  $AB$  пречник и ако је  $O$  центар круга  $k$ , онда је централни угао  $\angle AOB$  опружени угао, тј.  $\angle AOB = \pi$ .

**Теорема 3.** *Периферијски угао над пречником је прав.*

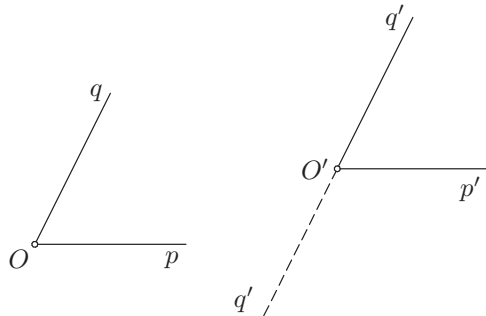
**Теорема 4.** *Угао који праве тангенција и тетива неког круга  $k$  подударан је периферијском углу над том тетивом.*



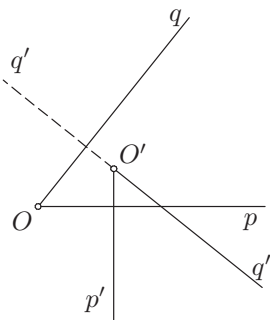
Наравно, како знамо да у општем случају постоје два неподударна периферијска угла над истом тетивом, поставља се питање којем од та два угла је подударан угао који граде тетива и тангента? Међутим, кад мало боље размислимо, видећемо да тангента и тетива граде два угла. У општем случају, један од тих углова је оштар, а други је туп, а како је један периферијски угао над тетивом оштар, а други туп, онда је јасно да ће оштар угао који граде тетива и тангента бити подударан оштром углу над том тетивом, а туп угао који граде тетива и тангента бити подударан тупом периферијском углу над том тетивом. Уколико су пак оба угла који граде тангента и тетива прави, онда је та тетива пречник, па су оба периферијска угла над том тетивом права. А сви прави углови су међусобно подударни.

Завршимо ову уводну причу двома теоремама.

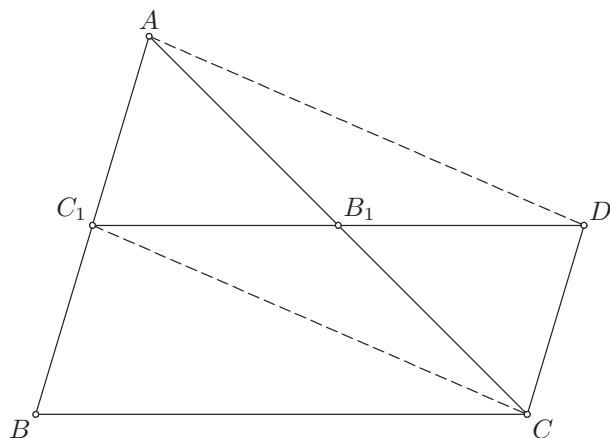
**Теорема 5** (Углови са паралелним крацима). *Нека су  $\angle pOq$  и  $\angle p'O'q'$  такви да је  $Op \parallel O'p'$  и  $Oq \parallel O'q'$ . Тада је  $\angle pOq = \angle p'O'q'$  или  $\angle pOq + \angle p'O'q' = \pi$ .*



**Теорема 6** (Углови са нормалним крацима). *Нека су  $\angle pOq$  и  $\angle p'O'q'$  такви да је  $Op \perp O'p'$  и  $Oq \perp O'q'$ . Тада је  $\angle pOq = \angle p'O'q'$  или  $\angle pOq + \angle p'O'q' = \pi$ .*



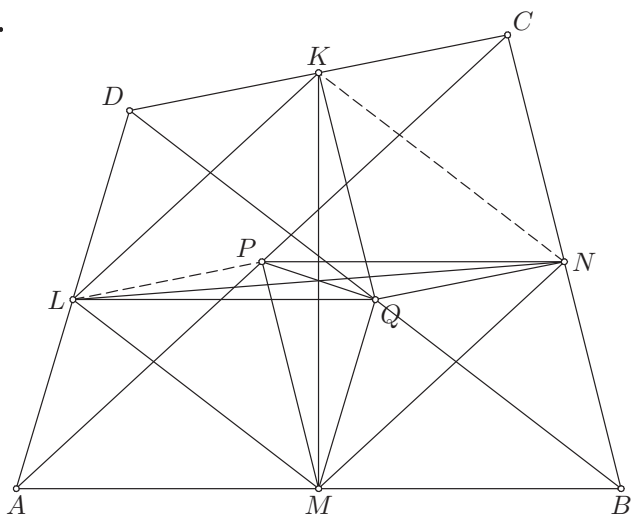
1.



Нека је  $D$  тачка на полуправој  $C_1B_1$  таква да је  $C_1B_1 = B_1D$ . Тада је тачка  $B_1$  средиште дијагонала  $AC$  и  $C_1D$ , па је четвороугао  $AC_1CD$  паралелограм. Следи да је  $AC_1 \parallel CD$  и да је  $AC_1 = CD$ . Како је  $AC_1 = C_1B$  јер је  $C_1$  средиште  $AB$ , имамо да је  $C_1B = CD$ , а како су праве  $AC_1$  и  $C_1B$  исте, следи да је и  $C_1B \parallel CD$ . Одавде закључујемо да је четвороугао  $BCDC_1$  паралелограм, па имамо да је  $BC \parallel C_1D$  и  $BC = C_1D$ . Како имамо да су праве  $C_1B_1$  и  $C_1D$  исте, следи да је  $C_1B_1 \parallel BC$ , а како је  $B_1$  средиште  $C_1D$ , следи да је  $C_1B_1 = \frac{1}{2}C_1D = \frac{1}{2}BC$ , што је и требало доказати.

**Дефиниција 3.** Дуж  $C_1B_1$  зове се *средња линија* троугла  $\triangle ABC$ .

2.



а) Дуж  $MN$  је средња линија троугла  $\triangle ABC$ , па закључујемо да је  $MN \parallel AC$  и  $MN = \frac{1}{2}AC$ . Такође,  $KL$  је средња линија троугла  $\triangle ACD$ , па следи да је  $KL \parallel AC$  и  $KL = \frac{1}{2}AC$ . Закључујемо да је  $MN \parallel KL$  и

$$MN = KL.$$

Слично је и  $QK$  средња линија троугла  $\triangle BCD$ , па је  $QK \parallel BC$  и  $QK = \frac{1}{2}BC$ . Такође је  $MP$  средња линија троугла  $\triangle ABC$ , па је  $MP \parallel BC$  и  $MP = \frac{1}{2}BC$ , па закључујемо да је  $QK \parallel MP$  и  $QK = MP$ .

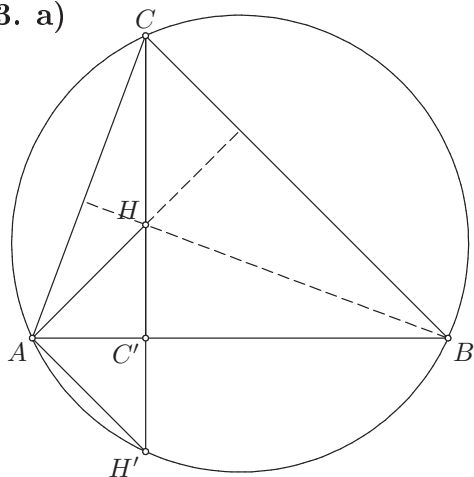
б) Из дела 2) имамо да је  $MN \parallel KL$  и  $MN = KL$ , па је четвороугао  $MNKL$  паралелограм. Следи да његове дијагонале  $MK$  и  $LN$  имају заједничко средиште. Такође, из дела 2) закључујемо да је  $QK \parallel MP$  и  $QK = MP$ , па је четвороугао  $KPMQ$  паралелограм. Одавде закључујемо да његове дијагонале  $KM$  и  $PQ$  имају заједничко средиште. Како смо доказали да и  $MK$  и  $LN$  имају заједничко средиште, а свака дуж има јединствено средиште, следи да све три дужи ( $MK$ ,  $LN$  и  $PQ$ ) имају заједничко средиште.

в) Дуж  $PM$  је средња линија троугла  $\triangle ABC$ , па је  $PM \parallel BC$ , а дуж  $MQ$  је средња линија троугла  $\triangle ABD$ , па је  $MQ \parallel AD$ . Ако са  $\angle(AD, BC)$  означимо угао који граде праве  $AD$  и  $BC$ , онда тај угао и угао  $\angle PMQ$  имају паралелне краке, па су подударни. Дакле,  $\angle PMQ = \angle(AD, BC)$ .

Дуж  $PN$  је средња линија троугла  $\triangle ABC$ , па је  $PN \parallel AB$ , а дуж  $NQ$  је средња линија троугла  $\triangle BCD$ , па је  $NQ \parallel CD$ . Угао који граде праве  $AB$  и  $CD$  и угао  $\angle PNQ$  имају паралелне краке, па морају бити једнаки, односно важи  $\angle PNQ = \angle(AB, CD)$ .

Коначно,  $LM$  је средња линија троугла  $\triangle ABD$ , па је  $LM \parallel BD$ , а  $MN$  је средња линија троугла  $\triangle ABC$ , па је  $MN \parallel AC$ . Сада видимо да углови  $\angle LMN$  и  $\angle(AC, BD)$  имају паралелне краке, па следи да је  $\angle LMN = \angle(AC, BD)$ .

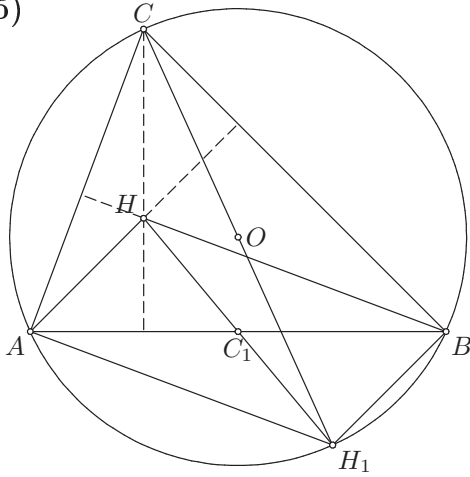
3. а)



Означимо са  $C'$  подножје висине из темена  $C$  на правој  $AB$ , а са  $H'$  тачку која је симетрична ортоцентру  $H$  у односу на страницу  $AB$  (у пи-

тању је осна симетрија). Тада је  $HH' \perp AB$  и тачка  $C'$  је средиште дужи  $HH'$ , тј.  $HC' = C'H'$ . Како је и  $\angle HC'A = \angle H'C'A$ , јер су оба угла права (једнака  $90^\circ$ , односно  $\frac{\pi}{2}$ ) и  $AC' = AC'$ , на основу става СУС закључујемо да је  $\triangle HC'A \cong \triangle H'C'A$ . Добијамо да је  $\angle AH'C' = \angle AHC'$ . Нама је циљ да докажемо да су углови  $\angle AH'C$  и  $\angle ABC$  подударни, јер ћемо онда имати да је угао  $\angle AH'C$  периферијски над луком  $\widehat{AC}$ , па ће  $H'$  припадати описаном кругу троугла  $\triangle ABC$ . Углови  $\angle AH'C'$  и  $\angle AH'C$  су исти, па је довољно доказати да је  $\angle AHC' = \angle ABC$ . Међутим, како је  $HC' \perp AB$  јер је  $HC'$  висина, и  $AH \perp BC$  јер је  $AH$  висина, следи да углови  $\angle AHC'$  и  $\angle ABC$  имају нормалне краке, те су међусобно подударни.

б)



Означимо са  $C_1$  средиште странице  $AB$  троугла  $\triangle ABC$  и са  $H_1$  тачку симетричну ортоцентру  $H$  у односу на тачку  $C_1$  (сада је у питању централна симетрија). Тада је тачка  $C_1$  средиште дужи  $HH_1$ . У четвороуглу  $AH_1BH$  дијагонале  $AB$  и  $HH_1$  имају заједничко средиште, тачку  $C_1$ , па је у питању паралелограм. Закључујемо да је  $BH \parallel H_1A$  и да је  $AH \parallel H_1B$ . Како је  $BH$  висина, следи да је  $BH \perp AC$ , па следи и да је  $H_1A \perp AC$ , тј.  $\angle H_1AC = \frac{\pi}{2}$ . Према томе, троугао  $\triangle ACH_1$  је правоугли, па је центар његовог описаног круга (дакле круга који садржи његова темена  $A, C, H_1$ ) средиште хипотенузе  $CH_1$ .

Слично,  $AH$  је висина, па је  $AH \perp BC$ , а пошто је  $H_1B \parallel AH$ , следи да је  $H_1B \perp BC$ , тј. да је  $\angle H_1BC = \frac{\pi}{2}$ . Према томе, троугао  $\triangle BCH_1$  је правоугли, па се центар његовог описаног круга (дакле круга који садржи његова темена  $B, C, H_1$ ) средиште хипотенузе  $CH_1$ .

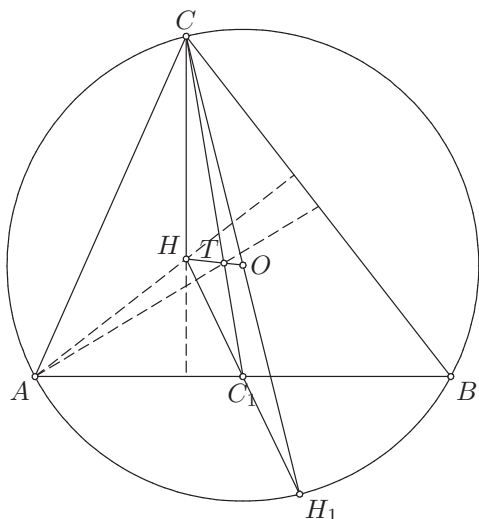
Описани кругови троуглова  $\triangle ACH_1$  и  $\triangle BCH_1$  имају исти центар (средиште дужи  $CH_1$ ) и исти полупречник (половина дужи  $CH_1$ ), те

ти троуглови имају исти описани круг. Дакле, један исти круг садржи тачке  $A, B, C, H_1$ . Како се око сваког троугла може описати само један круг, тј. за сваке три тачке постоји јединствени круг који их садржи, следи да описани круг троугла  $\triangle ABC$  (тј. онај круг који садржи његова темена  $A, B, C$ ) мора бити исти као и круг који садржи тачке  $A, B, C, H_1$  (дакле, заједнички описани круг троуглова  $\triangle ACH_1$  и  $\triangle BCH_1$ ). Овим смо доказали да се тачка  $H_1$  налази на описаном кругу троугла  $\triangle ABC$ , што је и требало доказати.

Штавише, у овом задатку смо доказали и следеће. Како се центар заједничког описаног круга за правоугле троуглове  $\triangle ACH_1$  и  $\triangle BCH_1$  налази на средишту  $CH_1$ , следи да је  $CH_1$  његов пречник. А пошто је тај круг исти као и описани круг за троугао  $\triangle ABC$ , следи да је  $CH_1$  пречник описаног круга троугла  $\triangle ABC$ .

**Напомена 1.** У задатку се тражило да докажемо да и тачке симетричне ортоцентру  $H$  у односу на странице  $AC$  и  $BC$ , као и тачке симетричне средиштима тих страница, припадају описаном кругу троугла  $\triangle ABC$ . Међутим, то није потребно посебно доказивати. Наиме, све три странице троугла  $\triangle ABC$  међусобно су равноправне, па исти доказ који је приказан за тачке симетричне ортоцентру  $H$  у односу на страницу  $AB$  и средиште странице  $AB$  (тачке  $H'$  и  $H_1$ ) важиће и за преостале тачке, уз промену одговарајућих слова (нпр. слово  $A$  заменимо словом  $B$ , слово  $B$  заменимо словом  $C$ , слово  $C$  заменимо словом  $A$ , слово  $C'$  словом  $A'$  и имамо доказ за тачке које су симетричне ортоцентру  $H$  у односу на страницу  $BC$  и средиште странице  $BC$ ).

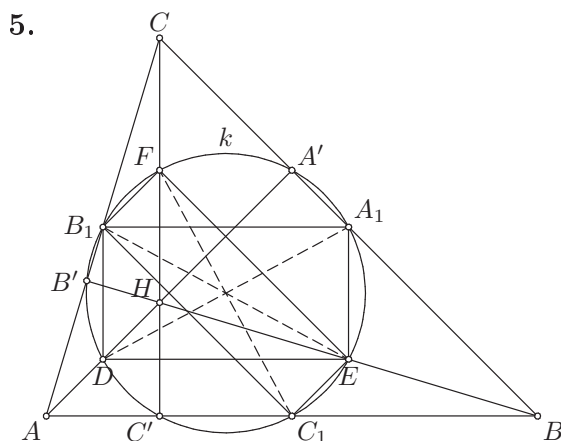
4.



Нека је  $H_1$  тачка из 3. задатка, тј. тачка симетрична ортоцентру  $H$  у односу на средиште  $C_1$  странице  $AB$ . Посматрајмо троугао  $\triangle CH_1H$ . Како је  $C_1$  средиште његове странице  $H_1H$ , следи да је дуж  $CC_1$  тежишна дуж тог троугла. Такође, дуж  $CC_1$  је и тежишна дуж троугла  $\triangle ABC$ , јер је  $C_1$  средиште његове странице  $AB$ . Из 3. задатка следи да је  $CH_1$  пречник описаног круга троугла  $\triangle ABC$ , па је његов центар  $O$  средиште дужи  $CH_1$ . Дакле, дуж  $HO$  је тежишна дуж троугла  $\triangle CH_1H$ , па је њен пресек са тежишном дужи  $CC_1$  тежиште троугла  $\triangle CH_1H$ . Означимо га са  $T_1$  и докажимо да је то у ствари тачка  $T$  (тежиште троугла  $\triangle ABC$ ), тј. да је  $T_1 = T$ .

Како је тежиште сваког троугла тачка која дели његове тежишне дужи у односу 2:1, следи да тежиште  $T$  троугла  $\triangle ABC$  дели његову тежишну дуж  $CC_1$  у односу 2:1, тј. важи  $CT : TC_1 = 2 : 1$ . Такође, тежиште  $T_1$  троугла  $\triangle CH_1H$  дели његову тежишну дуж  $CC_1$  у односу 2:1, тј. важи  $CT_1 : T_1C_1 = 2 : 1$ . Како је тачка која дели неку дуж у неком односу јединствена, следи да је  $T_1 = T$ . Дакле,  $T$  је тежиште и троугла  $\triangle CH_1H$ . Према томе, тачка  $T$  припада његовој тежишној дужи  $HO$  (па су  $H, T, O$  колинеарне) и дели је у односу 2:1, тј. важи  $HT : TO = 2 : 1$ . Како  $T$  припада баш дужи  $HO$ , следи да вектори  $\overrightarrow{HT}$  и  $\overrightarrow{TO}$  имају исти смер, а из  $HT : TO = 2 : 1$  следи да је  $HT = 2TO$ , па је заиста  $\overrightarrow{HT} = 2\overrightarrow{TO}$ .

**Дефиниција 4.** Права која садржи колинеарне тачке  $H, T, O$  зове се *Ојлерова права*.



Нека су  $A', B', C'$  редом подножја висина из темена  $A, B, C$  на страницама  $BC, CA, AB$  троугла  $\triangle ABC$  и нека су  $A_1, B_1, C_1$  редом средишта

страница  $BC, CA, AB$ . Дужи које спајају темена и ортоцентар  $H$  троугла  $\triangle ABC$  су дужи  $AH, BH, CH$ , па означимо редом са  $D, E, F$  њихова средишта. Треба доказати да постоји круг који садржи ових девет тачака  $(A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F)$ .

Посматрајмо четвороугао  $DEA_1B_1$ . Дуж  $B_1A_1$  је средња линија троугла  $\triangle ABC$ , па је  $B_1A_1 \parallel AB$  и  $B_1A_1 = \frac{1}{2}AB$ , а дуж  $DE$  је средња линија троугла  $\triangle ABH$ , па је  $DE \parallel AB$  и  $DE = \frac{1}{2}AB$ . Закључујемо да је  $DEA_1B_1$  паралелограм. Поред тога,  $DB_1$  је средња линија троугла  $\triangle ACH$ , па је  $DB_1 \parallel CH$ . Како је  $CH \perp AB$  јер је  $CH$  висина, следи да је  $DB_1 \perp AB$ . Међутим, имамо да је  $B_1A_1 \parallel AB$ , па је  $DB_1 \perp B_1A_1$ . Према томе, угао  $\angle DB_1A_1$  је прав, па како је паралелограм који има један прав угао у ствари правоугаоник, следи да је четвороугао  $DEA_1B_1$  правоугаоник. Како се око правоугаоника може описати круг, следи да постоји круг који садржи тачке  $A_1, B_1, D, E$ .

Слично, четвороугао  $B_1C_1EF$  је правоугаоник. Заиста, он је паралелограм, јер је  $B_1C_1$  средња линија троугла  $\triangle ABC$ , па је  $B_1C_1 \parallel BC$  и  $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$  и  $EF$  је средња линија троугла  $\triangle BCH$ , па је  $EF \parallel BC$  и  $EF = \frac{1}{2}BC$ , одакле закључујемо да је  $B_1C_1 \parallel EF$  и  $B_1C_1 = EF$ . Поред тога,  $C_1E$  је средња линија троугла  $\triangle ABH$ , па је  $C_1E \parallel AH$ , а пошто је  $AH \perp BC$  јер је  $AH$  висина, важи и  $C_1E \perp BC$ . А како је  $B_1C_1 \parallel BC$ , следи да је  $C_1E \perp B_1C_1$ , тј. да је угао  $\angle B_1C_1E$  прав, па је четвороугао  $B_1C_1EF$  паралелограм са једним правим углом, односно он је правоугаоник.

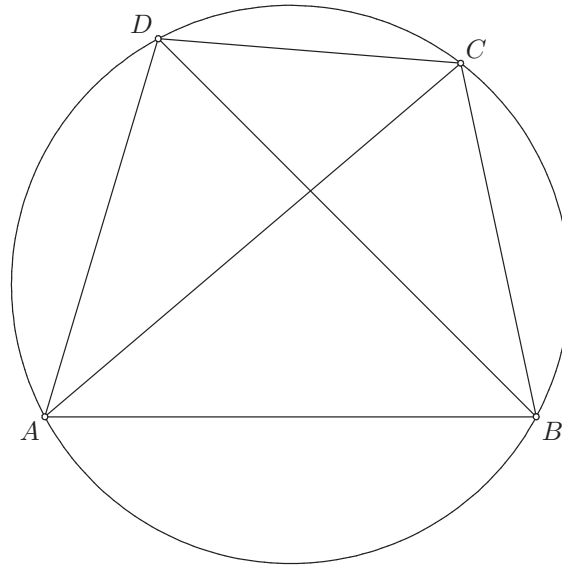
Како је дијагонала правоугаоника пречник његовог описаног круга, следи да је његов центар средиште дијагонале, а полупречник половина дијагонале. Дуж  $B_1E$  је заједничка дијагонала правоугаоника  $DEA_1B_1$  и  $B_1C_1EF$ , па следи да описани кругови тих правоугаоника имају исти центар и исти полупречник, односно та два правоугаоника имају исти описани круг. Дакле, круг који садржи тачке  $A_1, B_1, D, E$  садржи и тачке  $B_1, C_1, E, F$ . Дакле, постоји круг, назовимо га  $k$ , који садржи тачке  $A_1, B_1, C_1, D, E, F$ .

Остаје нам још да докажемо да тачке  $A', B', C'$  припадају том кругу. Дуж  $B_1E$  је пречник круга  $k$ , а угао  $\angle B_1B'E$  је прав, јер је  $B'E$  висина, а права  $B_1B'$  је иста као и права  $AC$ . Како знамо да је периферијски угао над пречником прав, следи да је  $\angle B_1B'E$  периферијски над пречником  $B_1E$  круга  $k$ , па тачка  $B'$  припада кругу  $k$ . Слично доказујемо и да тачке  $A', C'$  припадају кругу  $k$ . Уочимо дијагоналу  $DA_1$  правоугаоника  $DEA_1B_1$  и приметимо да је угао  $\angle DA'A_1$  прав, јер је  $DA'$  висина, а права  $A'A_1$  је иста као и права  $BC$ . Онда је  $\angle DA'A_1$  периферијски над пречником  $DA_1$  круга  $k$ , па  $A'$  припада кругу  $k$ . За тачку  $C'$  уочимо дијагоналу  $FC_1$  правоугаоника  $B_1C_1EF$  и приметимо да је  $\angle FC'C_1 = \frac{\pi}{2}$

јер је  $FC'$  висина, а права  $C'C_1$  иста као и права  $AB$ . Онда је угао  $\angle FC'C_1$  периферијски над пречником  $FC_1$ , па је  $C' \in k$ .

**Дефиниција 5.** Круг који садржи тачке  $A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F$  зове се *Ојлеров круг*.

**Дефиниција 6.** Четвороугао  $ABCD$  је *тетиван* ако се око њега може описати круг, тј. ако постоји круг који садржи његова темена  $A, B, C, D$ .



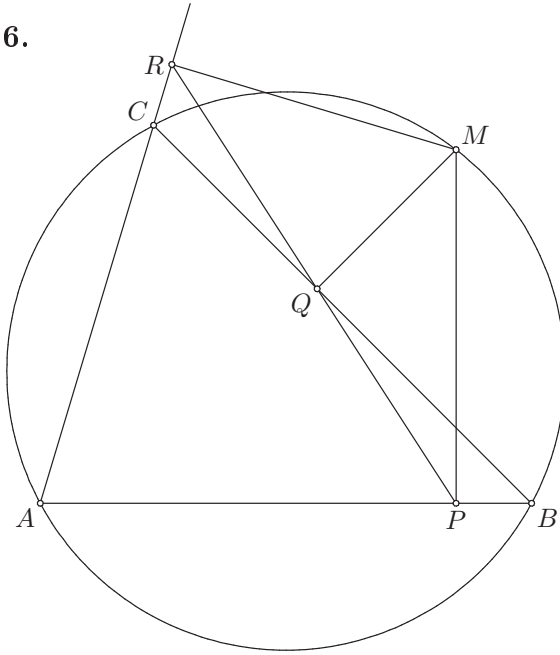
Посматрајмо конвексан четвороугао  $ABCD$ . Нека је он тетиван. Наспрамни углови  $\angle BAD$  и  $\angle BCD$  су периферијски углови над тетивом  $BD$  и при томе су тачке  $A, C$  са супротних страна праве  $BD$ . Следи да је  $\angle BAD + \angle BCD = \pi$ . Обратно, нека не знамо да ли је четвороугао  $ABCD$  тетиван, а имамо да је  $\angle BAD + \angle BCD = \pi$ . Посматрајмо круг  $k$  описан око троугла  $\triangle ABD$ . Како се тачке  $A, C$  налазе са супротних страна праве  $BD$ , следи да је угао  $\angle BCD$  периферијски над тетивом  $BD$ , па његово теме  $C$  припада кругу  $k$ . Дакле, круг  $k$  садржи темена четвороугла  $ABCD$ , па је четвороугао  $ABCD$  тетиван.

Дакле, услов да су наспрамни углови конвексног четвороугла суплементни потребан је и довољан (дакле еквивалентан) да четвороугао  $ABCD$  буде тетиван. Специјално, уколико су наспрамни углови четвороугла  $ABCD$  прави, онда су они суплементни, па је четвороугао  $ABCD$  тетиван. Обратно, наравно, не важи, тј. постоје четвороуглови који су тетивни а наспрамни углови нису прави углови (у супротном би то морало важити за оба пара наспрамних углова, па би тај четвороугао

морао бити правоугаоник, а знамо да постоје и тетивни четвороуглови који нису правоугаоници).

Од еквивалентних услова за тетивност конвексног четвороугла даћемо још један. Ако је четвороугао  $ABCD$  конвексан и  $\angle ADB = \angle ACB$ , онда је тај четвороугао тетиван. Овај услов је у ствари услов подударности периферијских углова  $\angle ADB = \angle ACB$  над луком  $\widehat{AB}$  (тачке  $C, D$  су са исте стране праве  $AB$ ).

6.



Нека је  $M$  произвољна тачка на кругу описаном око троугла  $\triangle ABC$  и нека су  $P, Q, R$  редом подножја нормала из  $M$  на правима  $AB, BC, CA$ . Уколико докажемо да је  $\angle PQB = \angle CQR$ , онда ће због колинеарности тачака  $B, Q, C$  ( $Q$  је подножје нормале из  $M$  на правој  $BC$ , па припада тој правој) углови  $\angle PQB$  и  $\angle CQR$  бити унакрсни, па ће онда и тачке  $P, Q, R$  припадати једној правој, тј. биће колинеарне.

Уочимо четвороугао  $APMR$ . Он је тетиван, јер су му супротни углови  $\angle APM$  и  $\angle ARM$  прави, па су суплементни. Следи да су и друга два супротна угла суплементна, тј.  $\angle PAR + \angle PMR = \pi$ . Даље, уочимо четвороугао  $CQMR$ . И он је тетиван, јер су му супротни углови  $\angle CQM$  и  $\angle CRM$  прави, па су суплементни. Одавде ћемо закључити да су периферијски углови  $\angle CQR$  и  $\angle CMR$  над луком  $\widehat{CR}$  подударни. Дакле,  $\angle CQR = \angle CMR$ .

Посматрајмо сада четвороугао  $PBMQ$ . Њему су углови  $\angle BQM$  и  $\angle BPM$  над  $BM$  подударни, јер су то прави углови. Следи да је четво-

роугао  $PBMQ$  тетиван, па је  $\angle PQB = \angle PMB$ , јер су то периферијски углови над луком  $\widehat{PB}$ . Коначно, четвороугао  $ABMC$  је тетиван (по дефиницији, његова темена  $A, B, M, C$  припадају једном кругу и то баш описаном кругу троугла  $\triangle ABC$ ), па су супротни углови  $\angle BAC$  и  $\angle BMC$  суплементни, тј.  $\angle BAC + \angle BMC = \pi$ .

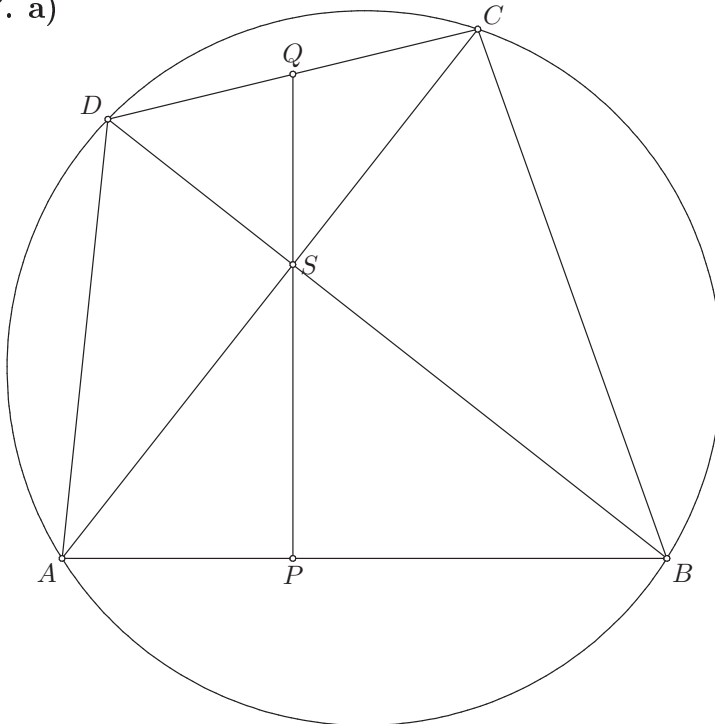
Сада, како је  $\angle BAC = \angle PAR$  јер је у питању исти угао и како важи да је  $\angle BAC + \angle BMC = \pi$  и  $\angle PAR + \angle PMR = \pi$ , закључујемо да је  $\angle BMC = \angle PMR$ . А како имамо да је  $\angle BMC = \angle BMP + \angle PMC$  и  $\angle PMR = \angle PMC + \angle CMR$ , следи да је  $\angle BMP = \angle CMR$ . Одавде следи, због  $\angle PQB = \angle PMB$  и  $\angle CQR = \angle CMR$ , да је  $\angle PQB = \angle CQR$ , што смо и желели да докажемо.

**Дефиниција 7.** Права која садржи тачке  $P, Q, R$  зове се *Симсонова права*.

**Дефиниција 8.** Четвороугао  $ABCD$  је *тангентан* уколико се у њега може уписати круг, тј. уколико постоји круг такав да су странице тог четвороугла тангенте на том кругу.

Ако се код четвороугла бисектрисе унутрашњих углова секу у једној тачки, онда је тај четвороугао тангентан.

7. а)

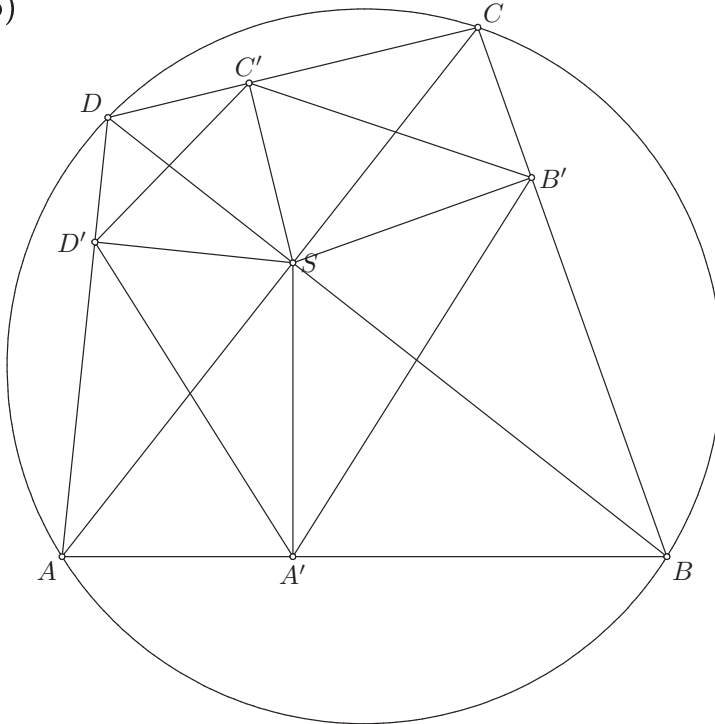


Нека је  $P$  подножје нормале из  $S$  на страници  $AB$  и нека је  $Q$  пресечна тачка праве  $PS$  и странице  $CD$ . Означимо угао  $\angle BAC = \alpha$  и угао  $\angle ABD = \beta$ . Како је  $\angle BAS = \angle BAC = \alpha$  и  $\angle ABS = \angle ABD = \beta$ , из  $\angle BAS + \angle ABS + \angle ASB = \pi$  и  $\angle ASB = \frac{\pi}{2}$  (дијагонале четвороугла  $ABCD$  су нормалне) следи да је  $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$ , тј. да је  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ .

Даље,  $\angle BDC = \angle BAC = \alpha$  и  $\angle ACD = \angle ABD = \beta$  (периферијски углови над истим луком). Како је  $\angle APS = \frac{\pi}{2}$  и  $\angle PAS = \angle BAS = \alpha$ , следи да је  $\angle PSA = \pi - \angle APS - \angle PAS = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \alpha = \beta$ . Поред тога, како је  $\angle ASB = \frac{\pi}{2}$ , следи да је  $\angle PSB = \angle ASB - \angle PSA = \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$ .

Сада приметимо да су углови  $\angle DSQ$  и  $\angle PSB$  унакрсни, па следи да је  $\angle DSQ = \angle PSB = \alpha$ . Такође, углови  $\angle CSQ$  и  $\angle PSA$  унакрсни, па је и  $\angle CSQ = \angle PSA = \beta$ . У троуглу  $\triangle DSQ$  су углови  $\angle DSQ = \alpha$  и  $\angle SDQ$  подударни (јер је  $\angle SDQ = \angle BDC = \alpha$ ), па је он једнакокраки. Следи да је  $DQ = QS$ . А у троуглу  $\triangle CSQ$  су углови  $\angle CSQ = \beta$  и  $\angle SCQ$  подударни (јер је  $\angle SCQ = \angle ACD = \beta$ ), па је и тај троугао једнакокраки. Следи да је  $CQ = QS$ , па заједно са  $DQ = QS$  следи да је  $CQ = DQ$ , односно да је  $Q$  средиште  $CD$ .

б)



Докажимо да су  $A'S, B'S, C'S, D'S$  симетрале унутрашњих углова код темена  $A', B', C', D'$  четвороугла  $A'B'C'D'$ . Тада ћемо имати да је симетрале унутрашњих углова четвороугла  $A'B'C'D'$  секу у једној тачки

(тачки  $S$ ), па ће то бити центар његовог уписаног круга, а сам четвороугао ће бити тангентни.

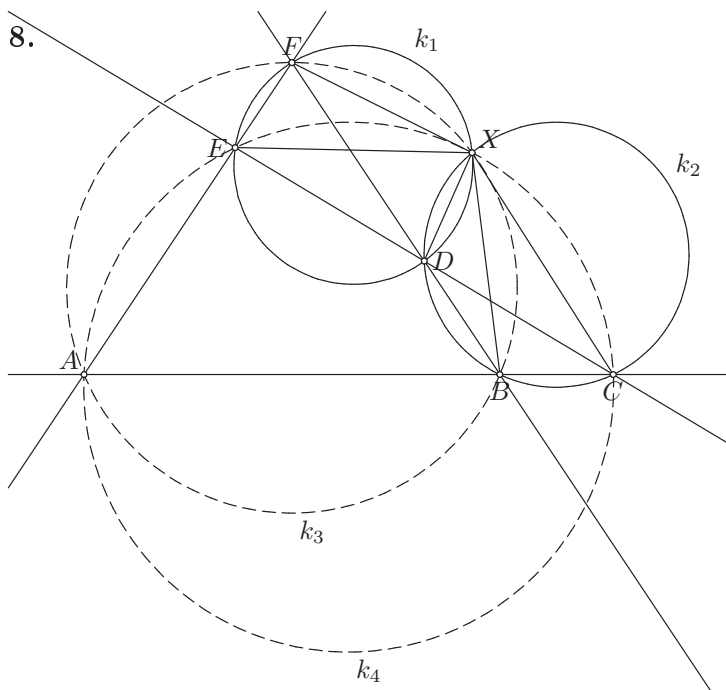
Четвороугао  $A'BB'S$  је тетиван. Заиста, наспрамни углови  $\angle BA'S$  и  $\angle BB'S$  су оба права, па су и суплементни. Слично, четвороугао  $B'CC'S$  је тетиван јер су наспрамни углови  $\angle CB'S$  и  $\angle CC'S$  су оба права, па су суплементни, затим је четвороугао  $C'DD'S$  тетиван јер су му наспрамни углови  $\angle DC'S$  и  $\angle DD'S$  оба права, па су суплементни, и, коначно, четвороугао  $D'AA'S$  је тетиван јер су му наспрамни углови  $\angle AD'S$  и  $\angle AA'S$  оба права, па су суплементни. Иначе, сви малопре поменути углови су прави јер су, по дефиницији, тачке  $A', B', C', D'$  подножја нормала из  $S$  редом на страницама  $AB, BC, CD, DA$ .

Пре него што искористимо тетивност горепоменутих четвороуглова, означимо углове:  $\angle SA'B' = \alpha$ ,  $\angle SB'C' = \beta$ ,  $\angle SC'D' = \gamma$ ,  $\angle SD'A' = \delta$ . Из тетивности четвороугла  $A'BB'S$  следи да је  $\angle SBB' = \angle SA'B' = \alpha$  (периферијски над луком  $\widehat{SB'}$ ). Међутим,  $\angle DBC = \angle SBB' = \alpha$ , па из тетивности четвороугла  $ABCD$  следи да је  $\angle DAC = \angle DBC = \alpha$  (периферијски над луком  $\widehat{DC}$ ), а сада из  $\angle SAD' = \angle CAD = \alpha$  и тетивности четвороугла  $D'AA'S$  следи да је  $\angle SA'D' = \angle SAD' = \alpha$ . Дакле,  $\angle SA'B' = \alpha = \angle SA'D'$ , па је заиста  $A'S$  симетрала угла  $B'A'D'$ , тј. унутрашњег угла код темена  $A'$  четвороугла  $A'B'C'D'$ .

Сасвим слично се доказује да је  $\beta = \angle SB'C' = \angle SCC' = \angle ACD = \angle ABD = \angle A'BS = \angle A'B'S$ , тј. да је  $\angle SB'C' = \angle SB'A' = \beta$ , а затим и да је  $\angle SC'D' = \angle SC'B' = \gamma$  и  $\angle SD'A' = \angle SD'C' = \delta$ . Дакле, заиста се тачка  $S$  налази у пресеку симетрала унутрашњих углова четвороугла  $A'B'C'D'$ , па је тај четвороугао тангентан.

Приметимо да су унутрашњи углови код темена  $A', B', C', D'$  четвороугла  $A'B'C'D'$  подударни редом угловима  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$ . Да бисмо доказали да је  $A'B'C'D'$  тетиван, довољно је доказати да је збир нека два супротна угла, нпр. углова код темена  $A'$  и  $C'$ , једнак опруженом углу. Другим речима, довољно је доказати да је  $2\alpha + 2\gamma = \pi$ , односно да је  $\alpha + \gamma = \frac{\pi}{2}$ . Из претходног имамо да је  $\angle SBC = \alpha$  и да је  $\angle SCB = \gamma$ , па како из услова нормалности дијагонала  $AC$  и  $BD$  четвороугла  $ABCD$  имамо да је  $\angle BSC = \frac{\pi}{2}$ , следи да је

$$\alpha + \gamma = \angle SBC + \angle SCB = \pi - \angle BSC = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$



Означимо пресечне тачке ових права са  $A, B, C, D, E, F$ , као на слици. Тада имамо четири троугла (то су  $\triangle DEF, \triangle BCD, \triangle ABF, \triangle ACE$ ). Нека су  $k_1, k_2, k_3, k_4$  редом њихови описани кругови. Желимо да докажемо да се они секу у једној тачки. Нека су  $X, D$  пресечне тачке кругова  $k_1$  и  $k_2$ . Означимо углове  $\angle EDF = \alpha$ ,  $\angle EXD = \beta$  и  $\angle DXB = \gamma$ . Углови  $\angle BDC$  и  $\angle EDF$  су унакрсни, па су подударни. Дакле,  $\angle BDC = \alpha$ . Угао  $\angle EXF$  је периферијски над луком  $\widehat{EF}$ , па је подударан углу  $\angle EDF$ . Следи да је  $\angle EXF = \alpha$ . Такође, угао  $\angle BXC$  је периферијски над луком  $\widehat{BC}$ , па је подударан углу  $\angle BDC$ . Следи да је и  $\angle BXC = \alpha$ .

Имамо и да је  $\angle EFD = \angle EXD = \beta$  јер су то периферијски углови над луком  $\widehat{ED}$ , као и  $\angle DCB = \angle DXB = \gamma$  јер су то периферијски углови над луком  $\widehat{DB}$ . Одредимо угао  $\angle BAF = \angle CAE$ , пошто је то заједнички унутрашњи угао четвороуглова  $ABXF$  и  $ACXE$ . У томе ће нам помоћи угао  $\angle CEA$  који је спољашњи угао код темена  $E$  троугла  $DEF$ , па је једнак збиру његова два несуседна унутрашња угла, а то су  $\angle EFD = \beta$  и  $\angle EDF = \alpha$ . Дакле,  $\angle CEA = \alpha + \beta$ . Следи да је  $\angle CAE = \pi - \angle CEA - \angle ACE = \pi - \alpha - \beta - \gamma$ .

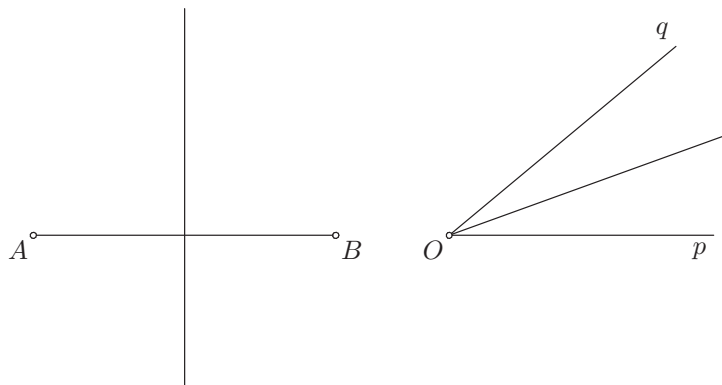
Сада доказујемо да су четвороуглови  $ABXF$  и  $ACXE$  тетивни, јер ћемо тада добити да њихово заједничко теме  $X$  припада круговима који садрже тачке  $A, B, F$ , односно  $A, C, E$ , а то су баш описани кругови троуглова  $\triangle ABF$ , односно  $\triangle ACE$ . А како је  $\angle BXF = \angle BXD + \angle DXE + \angle EXF = \alpha + \beta + \gamma$ , као и  $\angle CXE = \angle CXB + \angle BXD + \angle DXE = \alpha + \beta + \gamma$ , следи да су супротни углови  $\angle BAF$  и  $\angle BXF$  четвороугла  $ABXF$ , од-

носно  $\angle CAE$  и  $\angle CXE$  четвороугла  $ACXE$ , суплементни. Дакле, то су тетивни четвороуглови, па имамо да  $X$  припада круговима  $k_3, k_4$  (описаним око троуглова  $\triangle ABF$ , односно  $\triangle ACE$ ).

Према томе, тачка  $X$  припада круговима  $k_1, k_2, k_3, k_4$ . Како се кругови  $k_1, k_2$  секу у тачкама  $D, X$ , а пресек сва четири круга садржи тачку  $X$  и мора бити подскуп скупа који је пресек  $k_1$  и  $k_2$ , следи да је пресек сва четири круга или скуп  $\{D, X\}$  или скуп  $\{X\}$  (тј. само тачка  $X$ ). Међутим, тачка  $D$  не припада ни кругу  $k_3$  ни кругу  $k_4$ , па следи да не припада пресеку сва четири круга. Дакле, пресек кругова  $k_1, k_2, k_3, k_4$  је само тачка  $X$ , тј. та четири круга секу се у једној тачки (тачки  $X$ ).

**Дефиниција 9.** Нека је  $\alpha$  раван и нека се у њој налазе дуж  $AB$  и угао  $\angle pOq$ . Медијатриса дужи  $AB$  је њена симетрала, тј. то је права у равни  $\alpha$  која садржи њено средиште и нормална је на њој. Бисектриса угла  $\angle pOq$  је полуправа чије је теме тачка  $O$ , која припада углу  $\angle pOq$  и која дели угао  $\angle pOq$  на два подударна угла.

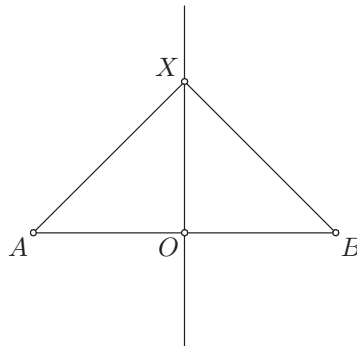
Дакле, медијатриса дужи је исто што и симетрала дужи, док је бисектриса угла *полуправа* која га дели на два подударна угла за разлику од симетрале угла која је *права* која садржи бисектрису. Међутим, у даљем раду нећемо бити толико стриктни да ли је нешто бисектриса или симетрала докле год нам није битно да ли је у питању права или полуправа.



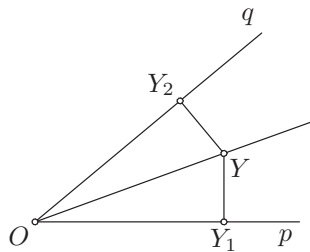
**Теорема 7.** Нека је  $\alpha$  раван и нека се у њој налазе дуж  $AB$  и угао  $\angle pOq$ . Медијатриса дужи  $AB$  је скуп свих тачака  $X$  равни  $\alpha$  таквих да је  $XA = XB$ . Бисектриса угла  $\angle pOq$  је скуп свих тачака  $Y$  равни  $\alpha$  које припадају углу  $\angle pOq$  таквих да је  $YY_1 = YY_2$ , где је  $Y_1$  подножје нормале из  $Y$  на краку  $Op$ , а  $Y_2$  подножје нормале из  $Y$  на краку  $Oq$ .

Другим речима, медијатриса дужи која се налази у равни  $\alpha$  је скуп свих тачака равни  $\alpha$  које су подједнако удаљене од њених темена, а бисектриса угла који се налази у равни  $\alpha$  је скуп свих тачака равни  $\alpha$

које припадају углу и које су подједнако удаљене од његових кракова.  
**Доказ.** Нека је  $X$  произвољна тачка медијатрисе дужи  $AB$ . Ако је  $X$  средиште дужи  $AB$ , онда одмах следи да је  $XA = XB$  (по дефиницији средишта дужи). Нека  $X$  није средиште дужи  $AB$ , а њега (средиште) означимо са  $O$ . Посматрајмо троуглове  $\triangle XOА$  и  $\triangle XOВ$ . Ти троуглови имају заједничку страну  $XO$ , затим су им углови  $\angle XOА$  и  $\angle XOВ$  подударни јер су то прави углови ( $X$  је на медијатрису дужи  $AB$ , па је  $XO \perp AB$ ) и стране  $OA$  и  $OB$  су им подударне јер је  $O$  средиште дужи  $AB$ . На основу става СУС закључујемо да је  $\triangle XOА \cong \triangle XOВ$ , па следи да је  $XA = XB$ , што смо и хтели да докажемо.



Обратно, нека је  $X$  тачка равни  $\alpha$  таква да је  $XA = XB$ . Ако је  $X$  средиште дужи  $AB$ , онда по дефиницији медијатрисе следи да јој  $X$  припада. Нека  $X$  није средиште дужи  $AB$  и означимо средиште са  $O$ . Да бисмо доказали да  $X$  припада медијатриси дужи  $AB$ , довољно је да докажемо да је  $XO \perp AB$ . Посматрајмо поново троуглове  $\triangle XOА$  и  $\triangle XOВ$ . Њима је страна  $XO$  заједничка, затим је  $OA = OB$  јер је  $O$  средиште дужи  $AB$  и по претпоставци важи  $XA = XB$ . Закључујемо на основу става ССС да је  $\triangle XOА \cong \triangle XOВ$ , па је  $\angle XOА = \angle XOВ$ . Како је  $\angle AOB = \pi$  и  $\angle AOB = \angle XOА + \angle XOВ = 2\angle XOВ$ , следи да је  $\angle XOВ = \frac{\pi}{2}$ , тј. да је  $XO \perp AB$ .



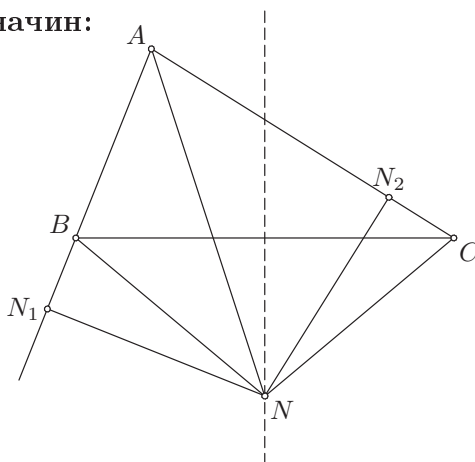
Нека је  $Y$  произвољна тачка бисектрисе угла  $\angle pOq$ . Ако је  $Y = O$ , онда су одговарајућа подножја нормала  $Y_1$  и  $Y_2$  на крацима  $Op$  и  $Oq$

угла  $\angle pOq$  из тачке  $Y(=O)$  исто једнака тачки  $O$ , тј.  $Y_1 = Y_2 = O$ , а онда јасно важи  $YY_1 = YY_2$ . Нека је тачка  $Y$  различита од темена  $O$  угла  $\angle pOq$  и нека су  $Y_1, Y_2$  подножја нормала из  $Y$  редом на крацима  $Op, Oq$  угла  $\angle pOq$ . Посматрајмо троуглове  $\triangle YOY_1$  и  $\triangle YOY_2$ . Њима је  $YO$  заједничка страница, затим је  $\angle YOY_1 = \angle YOY_2$  јер је полуправа  $OY$  бисектриса угла  $\angle Y_1OY_2$ , па га дели на два подударна угла  $\angle YOY_1$  и  $\angle YOY_2$ , и углови  $\angle YY_1O$  и  $\angle YY_2O$  су подударни јер су то прави углови. Закључујемо на основу става УУС да је  $\triangle YOY_1 \cong \triangle YOY_2$ , па добијамо да је  $YY_1 = YY_2$ , што смо и хтели да докажемо.

Обратно, нека је  $Y$  тачка из равни  $\alpha$  и нека је  $YY_1 = YY_2$ , где су  $Y_1, Y_2$  подножја нормала из тачке  $Y$  на крацима  $Op$  и  $Oq$  угла  $\angle pOq$ . Ако је  $Y = O$  (то је могуће, јер је тачка  $O$  подножје нормале из тачке  $O$  и на краку  $Op$  и на краку  $Oq$ , па би тада било  $Y_1 = Y_2 = Y = O$  и  $YY_1 = YY_2$ ), онда  $Y$  припада бисектриси угла  $\angle pOq$  (по дефиницији, теме угла припада његовој бисектриси). Нека је тачка  $Y$  различита од темена  $O$ . Посматрајмо поново троуглове  $\triangle OYY_1$  и  $\triangle OYY_2$ . Њима је  $OY$  заједничка страница, затим је по претпоставци  $YY_1 = YY_2$ , углови  $\angle OY_1Y$  и  $\angle OY_2Y$  наспрам  $OY$  подударни (то су прави углови), а углови  $\angle YOY_1$  и  $\angle YOY_2$  наспрам  $YY_1$ , односно  $YY_2$ , јесу оба оштра, јер у неком троуглу може бити највише један прав или туп угао, а у троугловима  $\triangle OYY_1$  и  $\triangle OYY_2$  већ имамо по један прав угао, па остали морају бити оштри, па је према ставу ССУ  $\triangle OYY_1 \cong \triangle OYY_2$ . закључујемо да је  $\angle YOY_1 = \angle YOY_2$ , тј. полуправа  $OY$  дели угао  $\angle Y_1OY_2$  на два подударна угла. Следи да је полуправа  $OY$  у ствари бисектриса угла  $\angle pOq$ , па  $Y$  припада тој бисектриси.  $\square$

9. Овај задатак решићемо на три начина.

I начин:



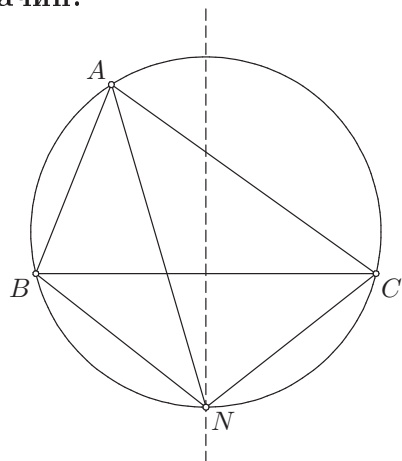
Нека је  $N$  тачка у пресеку медијатрисе странице  $BC$  и бисектрисе угла  $\angle BAC$ , тј. бисектрисе унутрашњег угла код темена  $A$  троугла



Нека је  $N$  пресечна тачка медијатрисе странице  $BC$  и описаног круга троугла  $\triangle ABC$  која припада оном луку  $\widehat{BC}$  којем не припада тачка  $A$  (наиме, постоје две пресечне тачке медијатрисе странице  $BC$  и описаног круга, па морамо прецизирати коју од њих желимо означити са  $N$ , а како желимо да то буде она тачка која се налази у углу  $\angle BAC$  и како имамо два лука  $\widehat{BC}$ , за  $N$  бирамо тачку на оном луку  $\widehat{BC}$  на којем се не налази тачка  $A$ ). Све што сада треба доказати јесте да је полуправа  $AN$  бисектриса угла  $\angle BAC$ , па је довољно доказати да је  $\angle BAN = \angle NAC$ .

Троугао  $\triangle NBC$  је једнакокраки јер је  $NB = NC$  ( $N$  је на медијатрисе дужи  $BC$ ), па следи да је  $\angle NBC = \angle BCN$ . Означимо те углове са  $\varphi$ . Углови  $\angle BAN$  и  $\angle BCN$  су оба периферијска над луком  $\widehat{BN}$ , па су они подударни, тј.  $\angle BAN = \angle BCN = \varphi$ . Слично, углови  $\angle NAC$  и  $\angle NBC$  су оба периферијска над луком  $\widehat{NC}$ , па су они подударни, тј. важи  $\angle NAC = \angle NBC = \varphi$ . Овим је доказ завршен, јер је сада  $\angle BAN = \varphi = \angle NAC$ .

**III начин:**



Нека су  $A, N$  пресечне тачке бисектрисе угла  $\angle BAC$  и описаног круга троугла  $\triangle ABC$  (поново, имамо две пресечне тачке, па како за једну знамо да је  $A$ , наглашавамо да је  $N$  друга пресечна тачка). Све што сада треба доказати јесте да је  $NB = NC$ , јер ће тада  $N$  бити на медијатрисе странице  $BC$ .

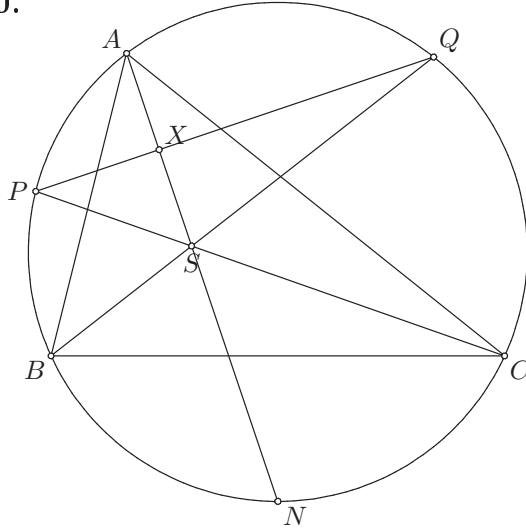
Углови  $\angle NBC$  и  $\angle NAC = \frac{\alpha}{2}$  су периферијски углови над луком  $\widehat{NC}$ , па су подударни, тј.  $\angle NBC = \angle NAC = \frac{\alpha}{2}$ . Такође, углови  $\angle BCN$  и  $\angle BAN = \frac{\alpha}{2}$  су периферијски над луком  $\widehat{BN}$ , па су подударни, тј.  $\angle BCN = \angle BAN = \frac{\alpha}{2}$ . Сада имамо да је  $\angle NBC = \frac{\alpha}{2} = \angle BCN$ , па је троугао  $\triangle NBC$  једнакокраки, одакле добијамо да је  $NB = NC$ .

Примећујемо да су II и III начин неупоредиво једноставнији од I начина. Наиме, то је зато што смо у II и III начину имали да се тачка  $N$

налази на описаном кругу троугла  $\triangle ABC$ , па смо могли да користимо периферијске углове, док у I начину нисмо имали да се  $N$  налази на описаном кругу, па нисмо могли да користимо периферијске углове.

**Напомена 2.** Слично као у 3. задатку, нама се тражило да докажемо да ово тврђење важи и за преостала два пара медијатриса и бисектриса (медијатрису странице  $AB$  и бисектрису њој наспрамног угла  $\angle ACB$ , као и медијатрису странице  $AC$  и бисектрису њој наспрамног угла  $\angle ABC$ ). Међутим, то није потребно посебно доказивати, јер су све три станице троугла међусобно равноправне и уз промену ознака за темена добићемо доказ за преостале парове медијатриса и бисектриса.

10.



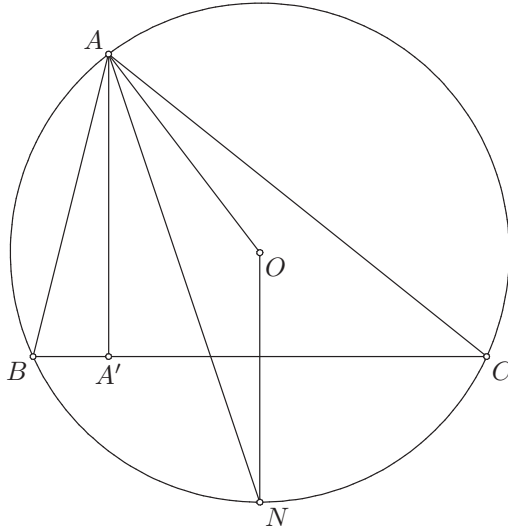
Из 9. задатка имамо да су  $P, Q$  тачке такве да су  $CP, BQ$  бисектрисе углова  $\angle BCA$  и  $\angle ABC$ . Као што знамо, бисектрисе унутрашњих углова троугла секу се у центру уписаног круга, па означимо пресечну тачку  $CP, BQ, s_\alpha$  са  $S$ . Такође, означимо са  $X$  пресечну тачку  $PQ$  и  $s_\alpha$ .

Посматрајмо троугао  $\triangle XSQ$  и израчунајмо његове унутрашње углове. Прво имамо да је  $\angle XQS = \angle PQB = \angle PCB = \frac{\gamma}{2}$ , јер је  $CP$  бисектриса угла  $\angle BCA = \gamma$ . Угао  $\angle XSQ$  је спољашњи угао троугла  $\triangle ABS$ , па је једнак збиру његових несуседних унутрашњих углова, а то су углови  $\angle BAS$  и  $\angle ABS$ . Из чињенице да су  $AS$  и  $BS$  бисектрисе углова  $\angle BAC = \alpha$  и  $\angle ABC = \beta$  следи да је  $\angle BAS = \frac{\alpha}{2}$  и  $\angle ABS = \frac{\beta}{2}$ . Дакле,  $\angle XSQ = \angle BAS + \angle ABS = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$ , па је

$$\angle SXQ = \pi - \angle XSQ - \angle XQS = \pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

а то управо значи да је  $QX \perp XS$ , односно да је  $PQ \perp s_\alpha$ .

11.



На основу 9. задатка следи да се тачка  $N$  налази на медијатриси стране  $BC$ , па као и тачка  $O$  припада тој медијатриси, следи да је права  $ON$  баш медијатриса стране  $BC$ . Одавде добијамо да је  $ON \perp BC$ , а како је и  $AA' \perp BC$ , следи да је  $ON \parallel AA'$ . Сада имамо да углови  $\angle A'AN$  и  $\angle ANO$  имају заједнички крак  $AN$  и паралелне краке  $A'A$  и  $NO$ , па су то подударни углови. Дакле,  $\angle A'AN = \angle ANO$ . Троугао  $\triangle ANO$  је једнакокрак, јер су  $OA$  и  $ON$  полупречници описаног круга троугла  $\triangle ABC$ , па су подударне дужи, тј.  $OA = ON$ . Следи да су углови насупрам њих подударни, тј. да је  $\angle ANO = \angle NAO$ .

Сада када знамо да су ови углови подударни, треба да изразимо било који од њих преко углова  $\beta$  и  $\gamma$ , тј. углова  $\angle ABC$  и  $\angle ACB$ . Изразимо нпр. угао  $\angle A'AN$ . Имамо да је  $\angle A'AN = \angle BAN - \angle BAA'$  и да је  $\angle BAN = \frac{\alpha}{2}$ . Како је троугао  $\triangle ABA'$  правоугли и  $\angle A'BA = \angle CBA = \gamma$ , следи да је  $\angle BAA' = \pi - \angle BAA' - \angle A'BA = \pi - \frac{\pi}{2} - \beta = \frac{\pi}{2} - \beta$ . Сада имамо да је

$$\begin{aligned} \angle A'AN &= \angle BAN - \angle BAA' = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} + \beta \\ &= \frac{\alpha - \pi + 2\beta}{2} = \frac{\alpha - (\alpha + \beta + \gamma) + 2\beta}{2} \\ &= \frac{\beta - \gamma}{2}, \end{aligned}$$

што је и требало доказати.

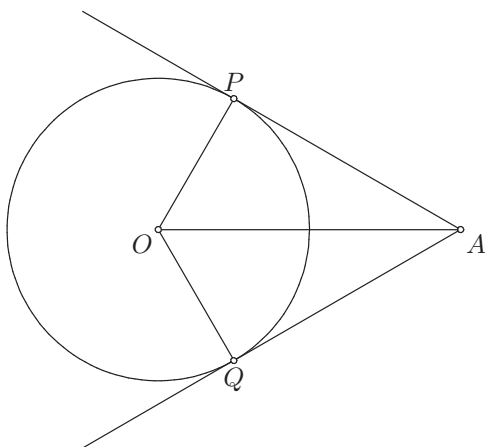
**Напомена 3.** Где се овде користила претпоставка да је  $AB < AC$ ? Ако замислимо да смо на претходној слици обрнуто означили тачке  $B$  и  $C$ , онда није  $\angle A'AN = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$ , него је  $\angle A'AN = \frac{1}{2}(\angle ACB -$

$\angle ABC$ ). Поента је у томе што се при претпоставци  $AB > AC$  мења распоред тачака на слици и онда не важе неке ствари које важе када је  $AB < AC$ . Конкретно, не важи  $\angle A'AN = \angle BAN - \angle BAA'$ , већ  $\angle A'AN = \angle A'AB - \angle NAB$ , па то мења резултат.

У строго формалном доказу, какви су нпр. докази на предавањима, морали бисмо помоћу претпоставке  $AB < AC$  доказивати да важи распоред тачака који добијамо цртањем слике. Међутим, када решавамо задатке на колоквијуму или испиту, ми то не морамо да доказујемо, већ је довољно да то „видимо са слике”. Зато је неопходно нацртати слику која одговара датој претпоставци. Конкретно у овом задатку, треба нацртати слику тако да заиста буде  $AB < AC$ , што смо и учинили.

**Дефиниција 10.** Нека је  $A$  тачка ван круга  $k$  и нека су  $P, Q$  додирне тачке тангенти из тачке  $A$  на кругу  $k$ . Дужи  $AP, AQ$  зову се *тангентне дужи* из тачке  $A$  на кругу  $k$ .

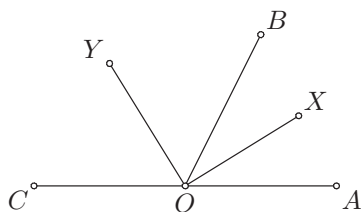
**Теорема 8.** Тангентне дужи из тачке  $A$  на кругу  $k$  су подударне.



**Доказ.** Посматрајмо троуглове  $\triangle OPA$  и  $\triangle OQA$ . Њима је заједничка страница  $OA$ , странице  $OP$  и  $OQ$  су подударне јер су то полупречници круга  $k$ , углови  $\angle OPA$  и  $\angle OQA$  су прави (углови између тангенти и полупречника), па су подударни, а углови  $\angle OAP$  и  $\angle OAQ$  су оба оштра јер већ имамо праве углове у троугловима  $\triangle OPA$  и  $\triangle OQA$ , па преостали углови морају бити оштри. Закључујемо на основу става ССУ да је  $\triangle OPA \cong \triangle OQA$ , па је  $AP = AQ$ , што је и требало доказати.  $\square$

**Дефиниција 11.** *Најоредни улови* они углови који имају заједничко теме и један крак, а преостали краци припадају једној правој.

**Теорема 9.** Бисектрисе најоредних улова су међусобно нормалне.

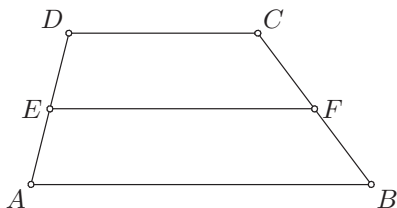


**Доказ.** Нека је  $\angle AOB = \alpha$  и  $\angle BOC = \beta$ . Тада је  $\alpha + \beta = \pi$ . Ако је  $OX$  бисектриса угла  $\angle AOB$ , а  $OY$  бисектриса угла  $\angle BOC$ , онда је  $\angle XOY = \frac{\alpha}{2}$  и  $\angle BOY = \frac{\beta}{2}$ . Следи да је  $\angle XOY = \angle XOY + \angle BOY = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2}$ , тј. да су бисектрисе  $OX$  и  $OY$  међусобно нормалне.  $\square$

**Дефиниција 12.** Четвороугао  $ABCD$  је *трапез* са *основицама*  $AB, CD$  и *крацима*  $AD, BC$  ако је  $AB \parallel CD$ .

Имали смо средњу линију троугла, а сада ћемо дефинисати и средњу линију трапеза.

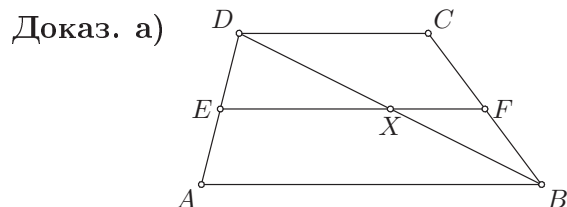
**Дефиниција 13.** Нека је  $ABCD$  трапез и нека су  $E, F$  редом средишта кракова  $AD, BC$ . Дуж  $EF$  зове се *средња линија* трапеза  $ABCD$ .



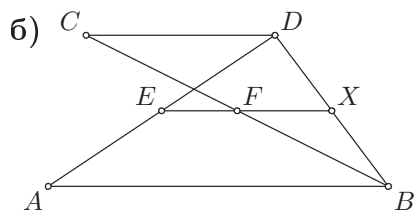
**Теорема 10.** Нека је четвороугао  $ABCD$  трапез и нека су  $E, F$  средишта кракова  $AD, BC$ . Тада је средња линија  $EF$  паралелна основицама трапеза, тј.  $EF \parallel AB$  и  $EF \parallel BC$  и важи

а)  $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$  ако је трапез  $ABCD$  конвексан;

б)  $EF = \frac{1}{2}(AB - CD)$  ако је трапез  $ABCD$  неконвексан и  $AB > CD$ .

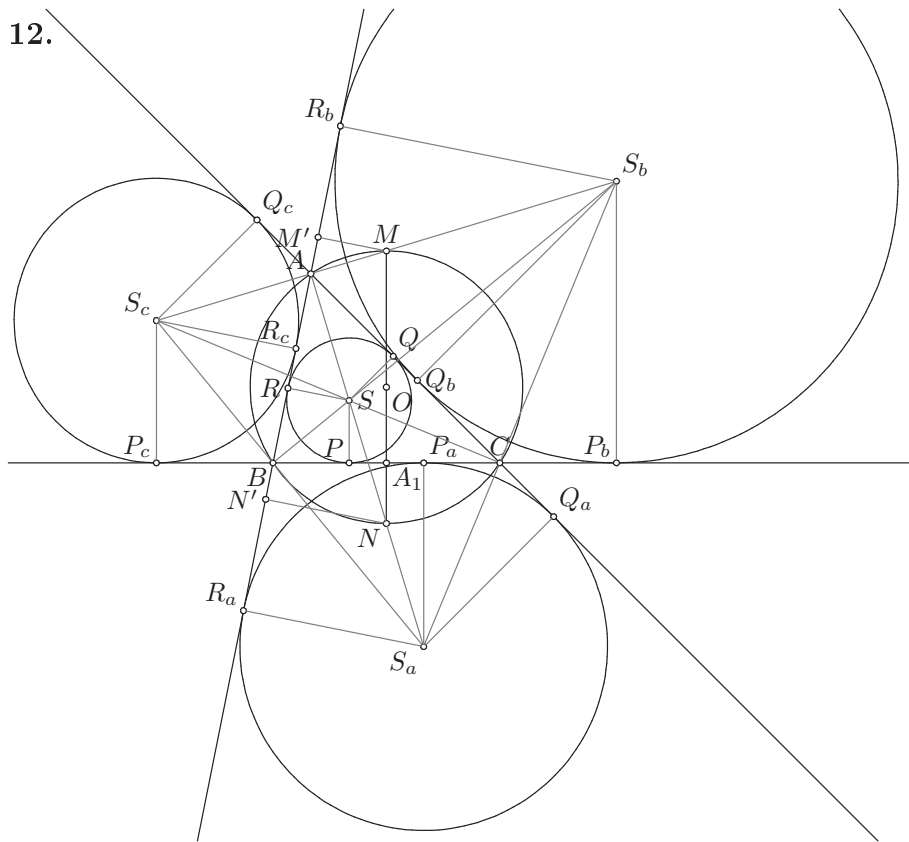


Нека је  $X$  средиште дијагонале  $BD$  трапеза  $ABCD$ . Следи да је  $EX$  средња линија троугла  $\triangle ABD$ , па је  $EX \parallel AB$  и  $EX = \frac{1}{2}AB$ . Слично,  $XF$  је средња линија троугла  $\triangle BCD$ , па је  $XF \parallel CD$  и  $XF = \frac{1}{2}CD$ . Како је  $AB \parallel CD$ , следи да је  $EX \parallel XF$ , па су тачке  $E, X, F$  колинеарне. Одавде добијамо да је  $EF \parallel AB(\parallel CD)$  и  $EF = EX + XF = \frac{1}{2}(AB + CD)$ .



Нека је  $X$  средиште дијагонале  $BD$  трапеza  $ABCD$ . Следи да је  $EX$  средња линија троугла  $\triangle ABD$ , па је  $EX \parallel AB$  и  $EX = \frac{1}{2}AB$ . Слично,  $XF$  је средња линија троугла  $\triangle BCD$ , па је  $XF \parallel CD$  и  $XF = \frac{1}{2}CD$ . Како је  $AB \parallel CD$ , следи да је  $EX \parallel XF$ , па су тачке  $E, X, F$  колинеарне. Одавде добијамо да је  $EF \parallel AB(\parallel CD)$  и  $EF = EX - XF = \frac{1}{2}(AB - CD)$ .  $\square$

**Напомена 4.** Ми смо доказали да су одређене дужи средње линије (троугла или трапеza) ако знамо да су њени крајеви средишта одговарајућих страница и онда смо добијали паралелност. Међутим, довољно је да знамо само за један крај дужи да је средиште одговарајуће странице и да знамо паралелност да би посматрана дуж била средња линија. Ово убудуће можемо користити.



1) Ово тврђење нећемо сада доказивати, јер ћемо користити сличност. Доказ ћемо видети у следећем поглављу.

2) Дужи  $AQ_a$  и  $AR_a$  су тангентне дужи из тачке  $a$  на споља уписаном кругу  $k_a$ , па следи да су оне подударне, тј. да је  $AQ_a = AR_a$ . Да бисмо доказали да су те дужи једнаке полуобиму троугла  $\triangle ABC$ , посматрајмо збир  $AQ_a + AR_a$ . Имамо да је  $AQ_a + AR_a = AC + CQ_a + AB + BR_a = AC + AB + CQ_a + BR_a$ , па како је  $CQ_a = CP_a$  и  $BR_a = BP_a$ , јер су то тангентне дужи редом из тачака  $C, B$  на кругу  $k_a$ , следи да је

$$\begin{aligned} AQ_a + AR_a &= AC + AB + CQ_a + BR_a \\ &= b + c + CP_a + BP_a = b + c + BC \\ &= b + c + a = 2p, \end{aligned}$$

па је  $AQ_a = AR_a = \frac{2p}{2} = p$ , што је и требало доказати. Такође, јасно је да смо овим доказали да је и  $BP_b = BR_b = p$ , као и  $CP_c = CQ_c = p$ , јер смо већ напомињали да су сва три темена троугла равноправна.

Даље, како је  $AQ = AR$ , јер су то тангентне дужи из тачке  $A$  на уписаном кругу  $k$ , следи да је  $QQ_a = AQ_a - AQ = AR_a - AR = RR_a$ . Такође, пошто знамо да је  $AQ_a = AR_a = p$ , треба да докажемо да је  $AQ = AR = p - a$ , да би било  $QQ_a = RR_a = AR_a - AR = p - (p - a) = a$ . У том циљу, означимо  $AQ = AR = x$ ,  $BR = BP = y$  (тангентне дужи из  $B$  на  $k$ ) и  $CP = CQ = z$  (тангентне дужи из  $C$  на  $k$ ). Сада из очигледних једнакости

$$\begin{aligned} AR + RB &= AB \\ BP + PC &= BC \\ CQ + QA &= CA \end{aligned}$$

следи да имамо следећи систем линеарних алгебарских једначина са непознатим  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned} x + y &= c \\ y + z &= a \\ z + x &= b. \end{aligned}$$

Саберимо све три једначине и добићемо  $x + y + y + z + z + x = c + a + b$ , односно  $2(x + y + z) = 2p$ , односно  $x + y + z = p$ . Сада лако добијамо да је

$$\begin{aligned} x &= x + y + z - (y + z) = p - a, \\ y &= x + y + z - (x + z) = p - b \quad \text{и} \\ z &= x + y + z - (x + y) = p - c. \end{aligned}$$

Дакле, доказали смо да је  $AQ = AR = x = p - a$  (успут смо доказали и да је  $BR = BP = y = p - b$  и  $CP = CQ = z = p - c$ ), па је

$$QQ_a = RR_a = AR_a - AR = p - (p - a) = a.$$

Приметимо да је  $Q_bQ_c = CQ_c - CQ_b$ , а имамо да је  $CQ_c = p$ , као и да је  $CQ_b = CP_b$  јер су то тангентне дужи из тачке  $C$  на кругу  $k_b$ . А како је  $CP_b = BP_b - BC$  и  $BP_b = p$ , следи да је  $CP_b = p - a$ , па имамо да је

$$Q_bQ_c = CQ_c - CQ_b = p - CP_b = p - (p - a) = a.$$

Слично, приметимо да је  $R_bR_c = BR_b - BR_c$ , затим да је  $BR_b = p$ , да је  $BR_c = BP_c = CP_c - CB$  и да је  $CP_c = p$ , па је  $BR_c = CP_c - CB = p - a$ , што значи да је

$$R_bR_c = BR_b - BR_c = p - (p - a) = a,$$

што је и требало доказати.

**3)** Све смо већ доказали док смо доказивали **2)**. Заиста, доказали смо да је  $AQ = AR = x = p - a$ , затим да је  $CQ_b = CP_b = p - a$  и коначно да је  $BR_c = BP_c = p - a$ . Дакле, заиста је

$$AQ = AR = BR_c = BP_c = CP_b = CQ_b = p - a.$$

**4)** Имамо да је  $PP_a = BP_a - BP$  и знамо да је  $BP = y = p - b$ . Како је  $BP_a = BR_a$  јер су то тангентне дужи из  $B$  на кругу  $k_a$  и како је  $BR_a = AR_a - AB = p - c$ , следи да је

$$PP_a = BP_a - BP = BR_a - (p - b) = p - c - (p - b) = b - c.$$

Даље, имамо да је  $P_bP_c = P_bC + CP_c$  и знамо да је  $P_bC = p - a$  и да је  $CP_c = p$ , па следи да је

$$P_bP_c = P_bC + CP_c = p - a + p = 2p - a = a + b + c - a = b + c.$$

што је и требало доказати.

**5)** Практично треба доказати да је  $A_1$  (средиште дужи  $BC$ ) средиште дужи  $PP_a$  и  $P_bP_c$ . Имамо да је

$$\begin{aligned} PA_1 &= BA_1 - BP = \frac{1}{2}BC - (p - b) \\ &= \frac{a}{2} - \frac{a + b + c}{2} + b = \frac{a - a - b - c + 2b}{2} \\ &= \frac{b - c}{2} = \frac{1}{2}PP_a, \end{aligned}$$

па је заиста  $A_1$  средиште дужи  $PP_a$ , тј.  $PA_1 = P_aA_1$ .

Слично, имамо да је

$$\begin{aligned} P_cA_1 &= P_cB + BA_1 = p - a + \frac{1}{2}BC \\ &= \frac{a+b+c}{2} - a + \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-2a+a}{2} \\ &= \frac{b+c}{2} = \frac{1}{2}P_cP_b, \end{aligned}$$

па је  $A_1$  средиште дужи  $P_cP_b$ , односно важи  $P_cA_1 = P_bA_1$ .

**6)** Посматрајмо троугао  $\triangle S_aS_bS_c$ . Важи да је  $S_aA \perp S_bS_c$ , јер је  $S_aA$  симетрала унутрашњег, а  $S_bS_c$  симетрала спољашњег угла код темена  $A$  троугла  $\triangle ABC$ , а за такве симетрале знамо да су међусобно нормалне. Дакле, тачка  $A$  је подножје висине из темена  $S_a$  троугла  $\triangle S_aS_bS_c$ . Слично су и тачке  $B, C$  редом подножја висина из темена  $S_b, S_c$  троугла  $\triangle S_aS_bS_c$ . Круг који садржи тачке  $A, B, C$  јесте описани круг  $l$  троугла  $\triangle ABC$ , а како су  $A, B, C$  подножја висина троугла  $\triangle S_aS_bS_c$ , следи да је круг  $l$  који их садржи Ојлеров круг троугла  $\triangle S_aS_bS_c$ . Осим подножја висина, Ојлеров круг садржи средишта страница и средишта дужи одређених теменима и ортоцентром троугла. У пресеку симетрала  $S_aA, S_bB, S_cC$  унутрашњих углова троугла  $\triangle ABC$  налази центар уписаног круга троугла  $\triangle ABC$ , тачка  $S$ , следи да је  $S$  ортоцентар троугла  $\triangle S_aS_bS_c$  (сетимо се,  $S_aA, S_bB, S_cC$  су висине троугла  $\triangle S_aS_bS_c$ ). А пошто тачка  $N$  припада кругу  $l$  и припада дужи  $S_aS$  која спаја теме  $S_a$  и ортоцентар  $S$  троугла  $\triangle S_aS_bS_c$ , следи да тачка  $N$  мора бити баш средиште дужи  $S_aS$ , тј. мора бити  $NS = NS_a$ .

Троугао  $\triangle SBS_a$  је правоугли с правим углом код темена  $B$  ( $SB$  је симетрала унутрашњег, а  $BS_a$  је симетрала спољашњег угла код темена  $B$  троугла  $\triangle ABC$ ) и  $N$  је средиште хипотенузе  $SS_a$ , па је  $N$  центар описаног круга  $\triangle SBS_a$ . Следи да је  $NS = NS_a = NB$ , а како  $N$  припада симетрали дужи  $BC$ , следи да је  $NB = NC$ , па имамо да је  $NS = NS_a = NB = NC$ .

Докажимо да  $M$  припада бисектриси  $AS_b$  спољашњег угла  $\angle CAR_b$  троугла  $\triangle ABC$ . Како је  $AS$  бисектриса унутрашњег угла  $\angle BAC$  троугла  $\triangle ABC$ , следи да је  $SA \perp AS_b$ , тј. да је  $\angle SAS_b = \frac{\pi}{2}$ . Тачка  $N$  припада бисектриси  $AS$ , па је  $\angle NAS_b = \frac{\pi}{2}$ , а  $MN$  је пречник описаног круга  $l$  троугла  $\triangle ABC$ , па је  $\angle NAM = \frac{\pi}{2}$  (периферијски угао над пречником). Одавде закључујемо да тачка  $M$  припада полуправој  $AS_b$ , а самим тим и правој  $S_cS_b$ . С друге стране, како  $M$  припада Ојлеровом кругу  $l$  круга  $\triangle S_aS_bS_c$  и како  $M$  није подножје висине, јер је то тачка  $A$ , следи да је  $M$  средиште странице  $S_bS_c$ . Троугао  $\triangle S_bBS_c$  је правоугли с правим

углом код темена  $B$  ( $S_bB$  је симетрала унутрашњег, а  $BS_c$  је симетрала спољашњег угла код темена  $B$  троугла  $\triangle ABC$ ) и  $M$  је средиште хипотенузе  $S_bS_c$ , па следи да је  $M$  центар описаног круга троугла  $\triangle S_bBS_c$ . Према томе,  $MS_b = MS_c = MB$ , а како је  $MB = MC$  јер  $M$  припада симетрали дужи  $BC$ , па следи да је  $MS_b = MS_c = MB = MC$ .

7) Четвороугао  $SPP_aS_a$  је трапез јер је  $SP \perp BC$  и  $S_aP_a \perp BC$ , па је  $SP \parallel S_aP_a$ . Такође,  $A_1N \perp BC$  јер је права  $A_1N$  симетрала дужи  $BC$ , па је  $A_1N \parallel SP$  и  $A_1N \parallel S_aP_a$ . Како је  $A_1$  средиште  $PP_a$ , следи да је  $A_1N$  средња линија неконвексног трапеца  $SPP_aS_a$ . Закључујемо да је  $A_1N = \frac{1}{2}(S_aP_a - SP) = \frac{1}{2}(\rho_a - \rho)$ .

Приметимо да овде нисмо искористили чињеницу да је  $N$  средиште  $SS_a$  да бисмо добили да је  $A_1N$  средња линија трапеца. Да се нисмо сетили Ојлеровог круга, ово би био други начин да се докаже да је  $N$  средиште  $SS_a$  и реши део 6) овог задатка.

Четвороугао  $S_cP_cP_bS_b$  је трапез, јер је  $S_cP_c \perp BC$  и  $S_bP_b \perp BC$ , па је  $S_cP_c \parallel S_bP_b$ . Такође,  $A_1M \perp BC$  јер је права  $A_1M$  симетрала дужи  $BC$ , па је  $A_1M \parallel S_cP_c$  и  $A_1M \parallel S_bP_b$ . Тачка  $A_1$  је средиште  $P_cP_b$ , па следи да је  $A_1M$  средња линија (конвексног) трапеца  $S_cP_cP_bS_b$ . Закључујемо да је  $A_1M = \frac{1}{2}(S_bP_b + S_cP_c) = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$ .

Поново, приметимо да нисмо искористили чињеницу да је  $M$  средиште  $S_cS_b$  да бисмо добили да је  $A_1M$  средња линија трапеца и да смо могли на овај начин доказати да је  $M$  средиште  $S_cS_b$  да се нисмо сетили Ојлеровог круга. При томе, како год да доказујемо да је  $M$  средиште  $S_cS_b$ , морали бисмо прво да докажемо да  $M$  припада  $S_cS_b$ .

8) Четвороугао  $S_cR_cR_bS_b$  је трапез јер је  $S_cR_c \perp AB$  и  $S_bR_b \perp AB$ , па је  $S_cR_c \parallel S_bR_b$ . Такође,  $MM' \perp AB$ , па је  $MM' \parallel S_cR_c$  и  $MM' \parallel S_bR_b$ , а  $M$  је средиште  $S_cS_b$ , па је  $MM'$  средња линија неконвексног трапеца  $S_cR_cR_bS_b$ . Следи да је  $MM' = \frac{1}{2}(S_bR_b - S_cR_c) = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$ .

Четвороугао  $SRR_aS_a$  је трапез јер је  $SR \perp AB$  и  $S_aR_a \perp AB$ , па је  $SR \parallel S_aR_a$ . Такође,  $NN' \perp AB$ , па је  $NN' \parallel SR \parallel S_aR_a$  и  $N$  је средиште  $SS_a$ , па је  $NN'$  средња линија конвексног трапеца  $SRR_aS_a$ . Закључујемо да је  $NN' = \frac{1}{2}(SR + S_aR_a) = \frac{1}{2}(\rho + \rho_a)$ .

9) За пречник  $MN$  описаног круга  $l$  троугла  $\triangle ABC$  имамо с једне стране да је  $MN = 2r$ , а с друге стране да је  $MN = MA_1 + A_1N = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c + \rho_a - \rho)$ . Дакле,  $2r = \frac{1}{2}(\rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho)$ , па је  $4r = \rho_a + \rho_b + \rho_c - \rho$ , односно  $\rho_a + \rho_b + \rho_c = 4r + \rho$ .

10) У делу 8) смо доказали да је  $MM'$  средња линија трапеца  $S_cR_cR_bS_b$ , па је  $M'$  средиште странице  $R_cR_b$ . Дакле,  $R_cM' = \frac{1}{2}R_cR_b = \frac{a}{2}$ . Даље имамо да је  $BM' = BR_c + R_cM' = p - a + \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-2a+a}{2} = \frac{1}{2}(b+c)$  и да је  $AM' = BM' - BA = \frac{1}{2}(b+c) - c = \frac{1}{2}(b-c)$ .

Такође, у делу 8) доказали смо да је  $NN'$  средња линија трапеца

$SR_aS_a$ , па је  $N'$  средиште  $RR_a$ . Следи да је  $N'R_a = \frac{1}{2}RR_a = \frac{a}{2}$ , па је  $AN' = AR_a - N'R_a = p - \frac{a}{2} = \frac{a+b+c-a}{2} = \frac{1}{2}(b+c)$ . Такође, следи да је  $BN' = AN' - AB = \frac{1}{2}(b+c) - c = \frac{1}{2}(b-c)$ .

Дакле, доказали смо да важи

$$AM' = BN' = \frac{1}{2}(b-c) \quad \text{и} \quad AN' = BM' = \frac{1}{2}(b+c).$$

11) Јасно је да је  $M'N' = M'A + AN' = \frac{1}{2}(b-c + b+c) = b$ .

## 2 Сличност

Као и подударност, сличност нам је позната још од раније. Ако описно подударност два објекта значи да они имају исти облик и исту величину, онда описно сличност два објекта значи да они имају само исти облик, док им величина не мора бити иста. Ако су у питању многоуглови, исти облик значи да они имају подударне углове. Међутим, како се странице односе на величину, следи да странице не морају бити подударне. Оно што ће за њих важити јесте да ће њихов међусобни однос бити исти.

Шта ћемо са круговима? Они немају ни углове ни странице, али јасно је да свака два круга имају исти облик (облик круга), па су слични. Овде морамо бити опрезни, јер нпр. свака два троугла имају облик троугла, па опет знамо да нису свака два троугла слична. Ако је нпр. један троугао оштроугли, а други тупоугли, они никако немају исти облик. Реч је о томе што постоји више различитих облика за троугао, док постоји само један једини облик за круг.

Све у свему, јасно је да претходна „дефиниција” није прецизна. На овом месту нећемо давати прецизну дефиницију сличности, али ћемо увести нешто што ће нам у томе помоћи. Како је раван **скуп** тачака (акценат је на речи скуп), следи да можемо дефинисати пресликавање тог скупа у себе које ће сликати тачке те равни у неке друге тачке. Наравно, не желимо да имамо неко „дивље” пресликавање, па ћемо захтевати да то пресликавање испуни неке услове.

**Дефиниција 14.** Нека је  $S$  произвољна тачка неке равни  $\alpha$  и нека је  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  произвољан реалан број различит од нуле. Пресликавање  $\mathcal{H}_{S,\lambda} : \alpha \longrightarrow \alpha$  такво да је  $\mathcal{H}_{S,\lambda}(X) = X'$ , где је  $X' \in \alpha$  таква да је  $\overrightarrow{SX'} = \lambda \overrightarrow{SX}$ , зове се *хомотетија*. При томе је тачка  $S$  њен *центар*, а  $\lambda$  њен *коэффициент*.

Могуће је дефинисати хомотетију са коефицијентом 0, али такво пресликавање слика сваку тачку равни  $\alpha$  у центар хомотетије, па нам оно није занимљиво.

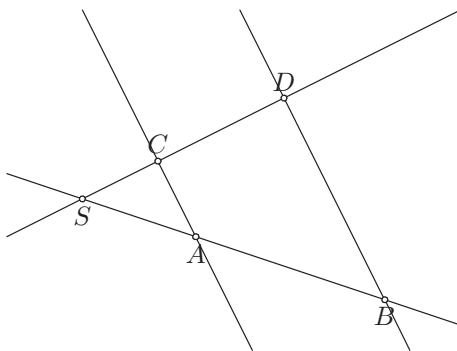
Испоставља се да је хомотетија управо пресликавање које нам треба, тј. то је пресликавање које „чува облик” фигура. Другим речима, када гледамо слику неке фигуре неком хомотетијом (скуп слика свих тачака те фигуре том хомотетијом), добијена фигура (скуп тачака) биће фигура истог облика као и полазна, а у зависности од тога да ли је  $|\lambda| > 1$  или  $|\lambda| < 1$ , она ће бити већа, односно мања од полазне фигуре.

Напоменимо само да се све што овде причамо односи на *еуклидску* геометрију. У хиперболичкој геометрији се такође дефинише сличност, али ће ту бити знатних разлика у односу на сличност у еуклидској геометрији. Рећи ћемо само да ће испасти да је сличност исто што и подударност, иако је дефинисана на другачији начин.

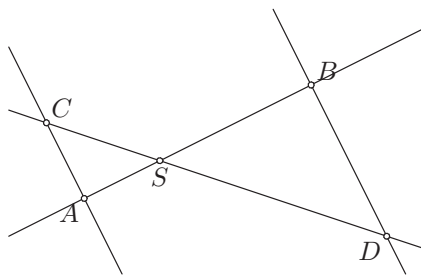
Формулишимо сада Талесову теорему, једну од најстаријих теорема у математици.

**Теорема 11** (Талес). *Нека се праве  $p, q$  секу у тачки  $S$ . Нека су  $A, B$  две различите тачке праве  $p$  које су различите од  $S$  и нека су  $C, D$  две различите тачке праве  $q$  које су различите од тачке  $S$ . Тада је*

$$\begin{aligned} AC \parallel BD &\iff \frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SD} = \frac{AC}{BD} \\ &\iff \frac{SA}{SC} = \frac{SB}{SD} = \frac{AB}{CD}. \end{aligned}$$



При томе, уопште не мора да важи распоред тачака као што је на овој слици. Теорема ће важити и ако имамо неки други распоред тачака.



Као што смо имали Ставовe о подударности троуглова, постоје и Ставови о сличности троуглова. Што се тиче њихових формулација, имаћемо странице и углове, и то баш као код ставова о подударности (нпр. неке две и њима захваћен угао), с што имамо у виду сличност чува *по-дударности углова и односе с-траница*.

Нека су дати троуглови  $\triangle ABC$  и  $\triangle A'B'C'$ . Ако важи нешто од следећег:

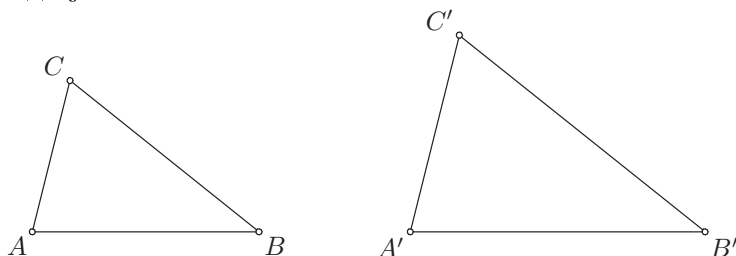
$$1^\circ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \angle BAC = \angle B'A'C';$$

$$2^\circ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'};$$

$$3^\circ \angle BAC = \angle B'A'C', \angle ABC = \angle A'B'C';$$

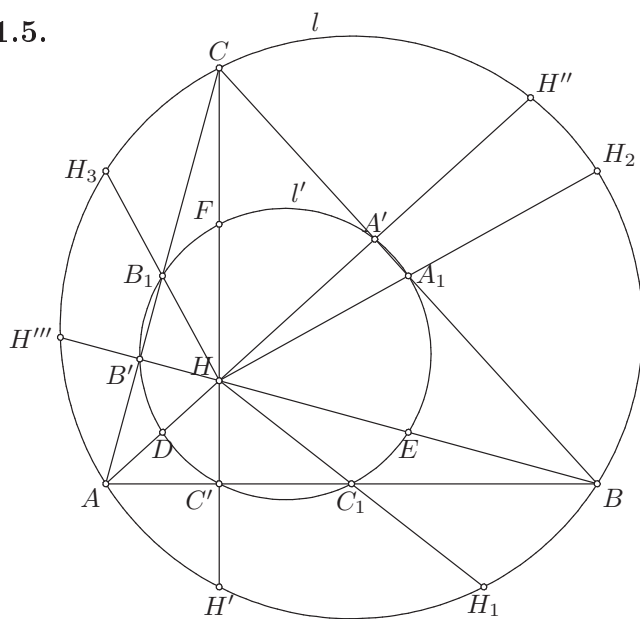
$$4^\circ \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, \angle ACB = \angle A'C'B', \text{ а углови } \angle ABC \text{ и } \angle A'B'C' \text{ су оба оштра, оба права или оба тупа;}$$

онда је  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .



Сада када знамо шта је хомотетија и када смо се подсетили Ставова о сличности троуглова, можемо да их искористимо да докажемо постојање Ојлеровог круга на други начин (задатак 1.5), као и да решимо део **1**) Великог задатка (задатка 1.12).

**1.5.**



Нека су  $A', B', C'$  редом подножја висина из темена  $A, B, C$  на страницама  $BC, CA, AB$  троугла  $\triangle ABC$  и нека су  $A_1, B_1, C_1$  редом средишта страница  $BC, CA, AB$ . Дужи које спајају темена и ортоцентар  $H$  троугла  $\triangle ABC$  су дужи  $AH, BH, CH$ , па означимо редом са  $D, E, F$  њихова средишта. Треба доказати да постоји круг који садржи ових девет тачака  $(A', B', C', A_1, B_1, C_1, D, E, F)$ .

Уочимо тачке  $H', H'', H'''$  које су симетричне тачки  $H$  редом у односу на странице  $AB, BC, CA$  и тачке  $H_1, H_2, H_3$  које су симетричне тачки  $H$  редом у односу на средишта  $C_1, A_1, B_1$  страница  $AB, BC, CA$ . На основу задатка 1.3 следи да тачке  $H', H'', H''', H_1, H_2, H_3$  припадају описаном кругу  $l$  троугла  $\triangle ABC$ .

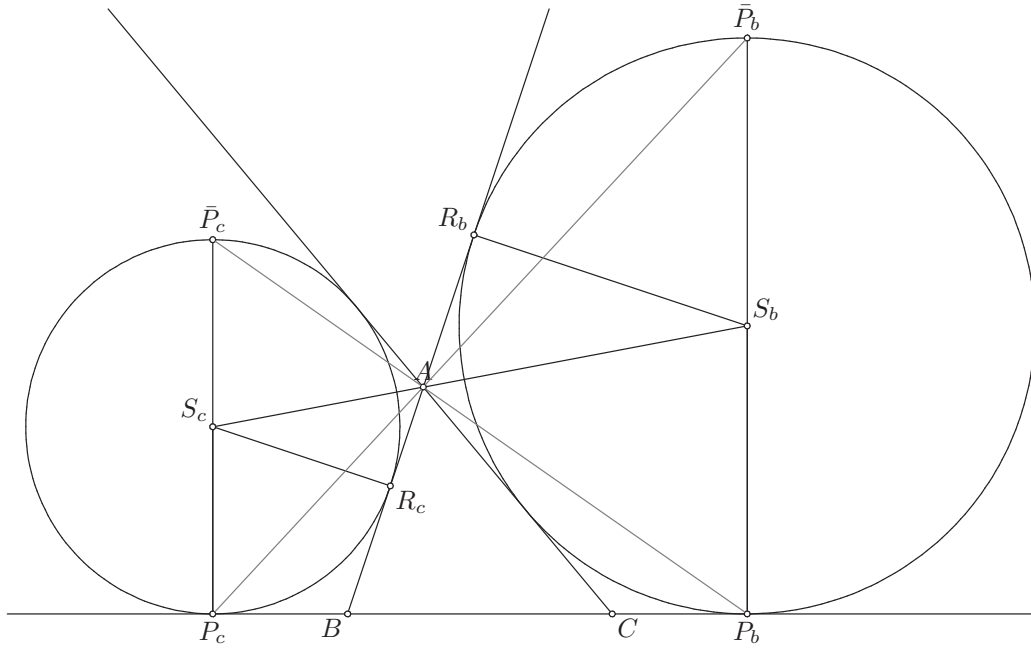
Нека је  $l' = \mathcal{H}_{H, \frac{1}{2}}(l)$ , тј. нека је  $l'$  слика круга  $l$  хомотетијом  $\mathcal{H}_{H, \frac{1}{2}}$ . Како хомотетија чува облик, следи да је  $l'$  круг. Шта ће бити слике тачака  $A, B, C, H', H'', H''', H_1, H_2, H_3$  том хомотетијом? По дефиницији, за произвољну тачку  $X$  је  $\mathcal{H}_{H, \frac{1}{2}}(X) = X'$ , при чему је  $\overrightarrow{HX'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HX}$ , односно кад се ослободимо вектора, биће  $\mathcal{B}(H, X', X)$  и  $HX' = \frac{1}{2}HX$ . Дакле,  $X'$  је средиште дужи  $HX$ , односно хомотетија  $\mathcal{H}_{H, \frac{1}{2}}$  слика произвољну тачку у средиште дужи чији су крајеви та тачка и тачка  $H$ . Према томе, како су  $D, E, F$  средишта дужи  $AH, BH, CH$ , затим  $C', A', B'$  средишта дужи  $HH', HH'', HH'''$  и  $C_1, A_1, B_1$  средишта дужи  $HH_1, HH_2, HH_3$ , следи да је

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{H, \frac{1}{2}}(A) &= D; \\ \mathcal{H}_{H, \frac{1}{2}}(B) &= E; \\ \mathcal{H}_{H, \frac{1}{2}}(C) &= F; \\ \mathcal{H}_{H, \frac{1}{2}}(H') &= C'; \\ \mathcal{H}_{H, \frac{1}{2}}(H'') &= A'; \\ \mathcal{H}_{H, \frac{1}{2}}(H''') &= B'; \\ \mathcal{H}_{H, \frac{1}{2}}(H_1) &= C_1; \\ \mathcal{H}_{H, \frac{1}{2}}(H_2) &= A_1; \\ \mathcal{H}_{H, \frac{1}{2}}(H_3) &= B_1.\end{aligned}$$

Како круг  $l$  садржи тачке  $A, B, C, H', H'', H''', H_1, H_2, H_3$ , следи да његова слика хомотетијом  $\mathcal{H}_{H, \frac{1}{2}}$ , дакле круг  $l'$ , садржи слике тих тачака, дакле тачке  $D, E, F, A', B', C', A_1, B_1, C_1$ .

Видимо да је ово решење доста елегантније и краће од првобитног решења. Сада ћемо решити део 1) Великог задатка користећи се Талесовом теоремом.





Нека је  $\bar{P}_b$  пресечна тачка праве  $S_bP_b$  и праве  $AP_c$  и нека је  $\bar{P}_c$  пресечна тачка праве  $S_cP_c$  и праве  $AP_b$ . Како је  $\mathcal{B}(S_c, A, S_b)$ , следи да је  $\mathcal{B}(P_c, A, \bar{P}_b)$  и да је  $\mathcal{B}(\bar{P}_c, A, P_b)$ , односно  $\mathcal{B}(P_b, A, \bar{P}_c)$ , па је довољно доказати да је  $P'_b = \bar{P}_b$  и да је  $P'_c = \bar{P}_c$ . Како тачка  $P'_b$  припада споља уписаном кругу  $k_b$  троугла  $\triangle ABC$  и правој  $S_bP_b$ , следи да је довољно доказати да је  $S_b\bar{P}_b = \rho_b$ . Слично, како тачка  $P'_c$  припада споља уписаном кругу  $k_c$  троугла  $\triangle ABC$  и правој  $S_cP_c$ , следи да је довољно доказати да је  $S_c\bar{P}_c = \rho_c$ .

Праве  $S_bS_c$  и  $R_bR_c$  се секу у тачки  $A$  и важи  $S_bR_b \perp AB$  и  $S_cR_c \perp AB$ , па је  $S_bR_b \parallel S_cR_c$ . Према Талесовој теорему следи да је  $\frac{AS_b}{AS_c} = \frac{S_bR_b}{S_cR_c} = \frac{\rho_b}{\rho_c}$ . Такође, имамо и да се праве  $S_bS_c$  и  $\bar{P}_bP_c$  секу у тачки  $A$  и да је  $S_b\bar{P}_b \perp BC$  и  $S_cP_c \perp BC$ , па је  $S_b\bar{P}_b \parallel S_cP_c$ . Према Талесовој теорему следи да је  $\frac{S_b\bar{P}_b}{S_cP_c} = \frac{AS_b}{AS_c} = \frac{\rho_b}{\rho_c}$ . Међутим,  $S_cP_c = \rho_c$ , па је  $\frac{S_b\bar{P}_b}{\rho_c} = \frac{\rho_b}{\rho_c}$ , одакле закључујемо да је  $S_b\bar{P}_b = \rho_b$ , односно да је  $P' = \bar{P}$ . Дакле, важи  $\mathcal{B}(P_c, A, P'_b)$ .

Такође, праве  $S_bS_c$  и  $P_b\bar{P}_c$  се секу у тачки  $A$  и из  $S_bP_b \perp BC$  и  $S_c\bar{P}_c \perp BC$  закључујемо да је  $S_bP_b \parallel S_c\bar{P}_c$ , па из Талесове теореме следи да је  $\frac{S_c\bar{P}_c}{S_bP_b} = \frac{AS_c}{AS_b} = \frac{\rho_c}{\rho_b}$ . Међутим, важи  $S_bP_b = \rho_b$ , па је  $\frac{S_c\bar{P}_c}{\rho_b} = \frac{\rho_c}{\rho_b}$ , па је  $S_c\bar{P}_c = \rho_c$ , тј.  $P'_c = \bar{P}_c$ . Дакле, важи  $\mathcal{B}(P_b, A, P'_c)$ .

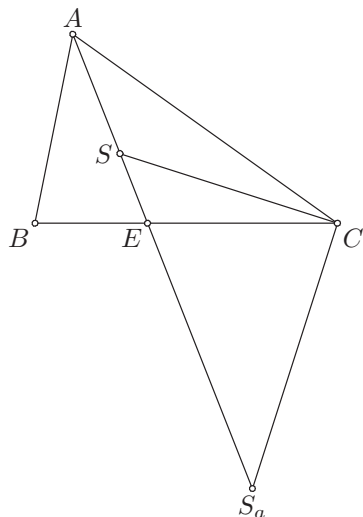
Сада прелазимо на задатке из сличности. Први задатак је Теорема о симетрали угла. Ова теорема је веома важна и треба је знати, јер ће се користити и у даљим задацима (нпр. као што се средња линија користи у многим другим задацима).

[illegible][illegible][illegible][illegible]

у жељи да се искористи Талесова теорема.

**2.** Овде су тачке  $E, F$  из 1. задатка, а тачке  $S, S_a, S_b, S_c$  су тачке из Великог задатка, дакле центри редом уписаног круга  $k$  и споља уписаних кругова  $k_a, k_b, k_c$ .

**а)**



Применом Теореме о симетрали угла (1. задатка) на троугао  $\triangle CAE$  закључујемо да је  $AS : SE = AS_a : S_aE = AC : CE$ . Такође, знамо да је  $BE : CE = AB : AC$  (1. задатак), па је  $AC : CE = AB : BE$ . Означимо тај однос са  $\lambda$ , дакле нека је  $\frac{AC}{CE} = \frac{AB}{BE} = \lambda$ . Одавде је  $AC = \lambda CE$  и  $AB = \lambda BE$ , па је  $AB + AC = \lambda(BE + CE) = \lambda BC$ . Следи да је  $\lambda = (AB + AC) : BC$ , а како је  $AS : SE = AS_a : S_aE = AC : CE = \lambda$ , следи да је  $AS : SE = AS_a : S_aE = (AB + AC) : BC$ .

**б)** Како је  $AE = AS + SE$ , дељењем са  $SE$  добијамо да је

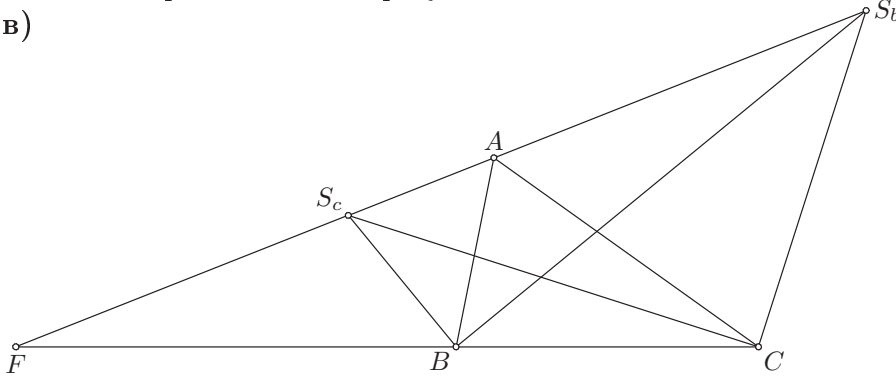
$$\begin{aligned} \frac{AE}{SE} &= \frac{AS + SE}{SE} = \frac{AS}{SE} + \frac{SE}{SE} \\ &= \frac{AS}{SE} + 1 = \frac{AB + AC}{BC} + 1 \\ &= \frac{AB + AC}{BC} + \frac{BC}{BC} = \frac{AB + AC + BC}{BC}. \end{aligned}$$

Слично, како је  $AE = AS_a - S_aE$ , дељењем са  $S_aE$  добијамо да је

$$\begin{aligned} \frac{AE}{S_aE} &= \frac{AS_a - S_aE}{S_aE} = \frac{AS_a}{S_aE} - \frac{S_aE}{S_aE} \\ &= \frac{AS_a}{S_aE} - 1 = \frac{AB + AC}{BC} - 1 \\ &= \frac{AB + AC}{BC} - \frac{BC}{BC} = \frac{AB + AC - BC}{BC}. \end{aligned}$$

Овде смо само користили претходне резултате и уз мало рачунања дошли до траженог новог резултата.

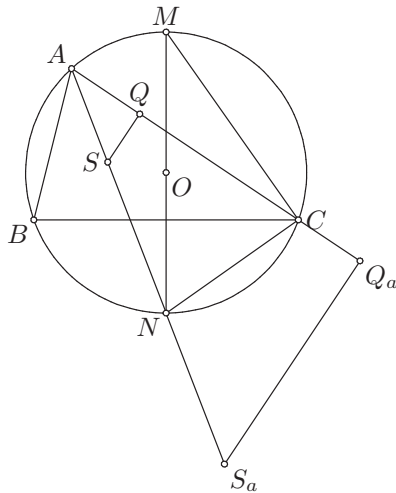
в)



Применом Теореме о симетрали угла на троугао  $\triangle BAF$  добијамо да је  $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = AB : BF$ . Такође, применом те теореме на троугао  $\triangle CAF$  добијамо да је  $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = AC : CF$ . Означимо тражени непознати однос са  $\lambda$ , дакле  $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = \lambda$ . На основу добијених резултата имамо да је  $AB : BF = AC : CF = \lambda$ . Иначе, овај резултат смо могли директно да добијемо из 1. задатка, јер из  $BF : CF = AB : AC$  следи да је  $AB : BF = AC : CF$ . Одавде следи да је  $AB = \lambda BF$  и  $AC = \lambda CF$ , па одузимањем добијамо да је  $AC - AB = \lambda(CF - BF) = BC$ . Дакле,  $\lambda = (AC - AB) : BC$ , па следи тражени резултат  $AS_b : S_bF = AS_c : S_cF = (AC - AB) : BC$ .

У овом задатку користили смо једну ствар коју ћемо сада издвојити. Ако за неке реалне бројеве  $a, b, c, d$  такве да је  $c, d \neq 0$  важи  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ , онда је тај однос једнак односу  $\frac{ka+lb}{kc+ld}$  за било које  $k, l \in \mathbb{R}$ , тј.  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ka+lb}{kc+ld}$ . Заиста, означимо  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \lambda$ . Тада је  $a = \lambda c$  и  $b = \lambda d$ , па следи да је  $ka + lb = k\lambda c + l\lambda d = \lambda(kc + ld)$ , одакле следи да је  $\lambda = \frac{ka+lb}{kc+ld}$ .

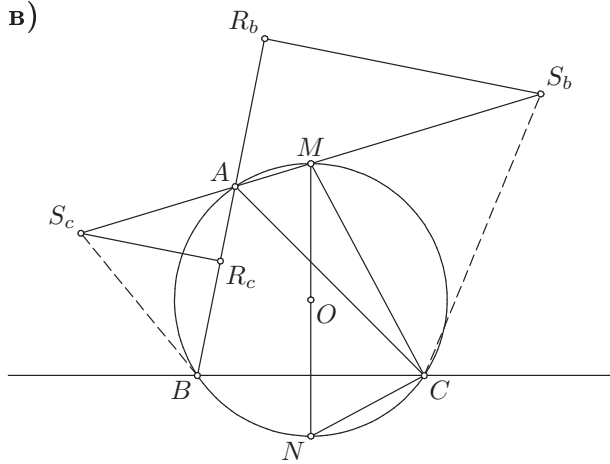
3. а)



Сличност даје односе, а не производе дужи, али можемо те односе помножити дужима које су у имениоцима и доћи до производа. Како нам се јавља полупречник уписаног круга, морамо уочити подножје нормале из центра  $S$  уписаног круга на некој од страница троугла  $\triangle ABC$ , нпр. подножје  $Q$  на страници  $AC$ . Пошто нам се јавља  $2r$ , тј. пречник описаног круга, и пошто већ имамо тачку  $N$ , уочимо тачку  $M$  из Великог задатка, јер тада имамо пречник  $MN = 2r$ .

Сада имамо да је  $\angle SAQ = \angle NAC = \angle NMC$  (периферијски над луком  $\widehat{NC}$ ) и да су углови  $\angle SQA$  и  $\angle NCM$  правој ( $\angle NMC$  је периферијски над пречником  $NM$ ), па је  $\angle SQA = \angle NCM$ . Следи да је  $\triangle ASQ \sim \triangle MNC$ , па је  $SA : NM = SQ : NC$ . Множењем са  $NM$  и  $NC$  добијамо да је  $SA \cdot NC = NM \cdot SQ$ . Како је  $NM = 2r$ ,  $SQ = \rho$  и  $NC = SN$  (Велики задатак, став 6)), следи да је  $SA \cdot SN = 2r\rho$ , што је и требало доказати.

б) Слично као у делу а), уочимо тачке  $M, Q_a$  из Великог задатка. Имамо да је  $\angle S_aAQ_a = \angle NAC = \angle NMC$  (периферијски над луком  $\widehat{NC}$ ) и да су углови  $\angle S_aQ_aA$  и  $\angle NCM$  прави, па је  $\angle S_aQ_aA = \angle NCM$ . Следи да је  $\triangle AS_aQ_a \sim \triangle MNC$ , па је  $S_aA : NM = S_aQ_a : NC$ , односно, после множења,  $S_aA \cdot NC = NM \cdot S_aQ_a$ . Заменом  $NM = 2r$ ,  $S_aQ_a = \rho_a$  и  $NC = S_aN$  (Велики задатак, став 6)) добијамо  $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$ .

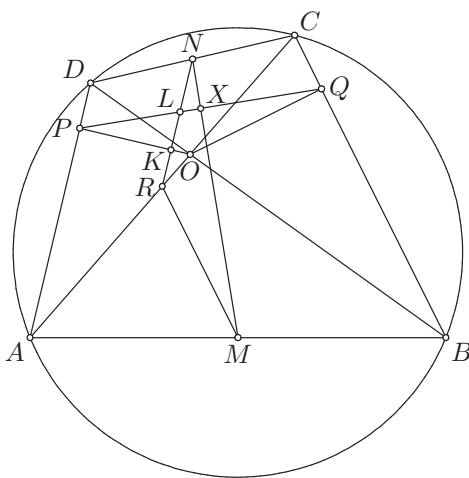


Како нам се овде јавља  $\rho_b$ , уочимо подножје нормале из  $S_b$  на некој од страница троугла  $\triangle ABC$ , нпр. на страници  $AB$  (дакле, тачку  $R_b$ ) и како се поново јавља пречник описаног круга  $2r$ , уочимо пречник  $MN$ . Углови  $\angle MNC$  и  $\angle MAC$  су периферијски над луком  $\widehat{MC}$ , па су подударни, дакле  $\angle MNC = \angle MAC = \frac{\pi - \alpha}{2}$  (права  $AM$  је симетрала спољашњег угла код темена  $A$  троугла  $\triangle ABC$ ). Такође,  $\angle S_bAR_b = \frac{\pi - \alpha}{2}$ , па је  $\angle MNC = \angle S_bAR_b$ . Важи и  $\angle MCN = \frac{\pi}{2} = \angle S_bR_bA$ , па следи

да је  $\triangle MNC \sim \triangle S_bAR_b$ . Дакле,  $S_bA : MN = S_bR_b : MC$ , односно  $S_bA \cdot MC = MN \cdot S_bR_b$ . Заменом  $MN = 2r$ ,  $S_bR_b = \rho_b$  и  $MC = S_bM$  (Велики задатак, став 6)) добијамо  $S_bA \cdot S_bM = 2r\rho_b$ .

г) Слично као у делу в), уочимо тачке  $M, R_c$  из Великог задатка. Имамо да је  $\angle S_cAR_c = \frac{\pi-\alpha}{2} = \angle MAC = \angle MNC$  (прве две једнакости важе јер је  $S_cM$  симетрала спољашњег угла код темена  $A$ , а последња јер су то периферијски углови над луком  $\widehat{MC}$ ), као и  $\angle S_cR_cA = \frac{\pi}{2} = \angle MCN$ , па је  $\triangle S_cAR_c \sim \triangle MNC$ . Следи  $S_cA : MN = S_cR_c : MC$ , односно  $S_cA \cdot MC = MN \cdot S_cR_c$ . Заменом  $MN = 2r$ ,  $S_cR_c = \rho_c$  и  $MC = S_cM$  (Велики задатак, став 6)) добијамо  $S_cA \cdot S_cM = 2r\rho_c$ .

4.



Нека је  $R$  средиште дијалонале  $AC$ . Тада је  $RM$  средња линија троугла  $\triangle ABC$ , па је  $RM \parallel BC$  и  $RM = \frac{1}{2}BC$ , а  $RN$  је средња линија троугла  $\triangle ACD$ , па је  $RN \parallel AD$  и  $RN = \frac{1}{2}AD$ . Даље, како је  $OQ \perp BC$  и  $OP \perp AD$ , следи да је  $RM \perp OQ$  и  $RN \perp OP$ , па је  $\angle MRN = \angle QOP$  (углови с нормалним крацима). Поред тога имамо да је  $\frac{MR}{RN} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}AD} = \frac{BC}{AD}$ , па је довољно да докажемо да је  $OQ : OP = BC : AD$  да би следило да је  $\triangle MRN \sim \triangle QOP$ .

Троуглови  $\triangle AOD$  и  $\triangle BOC$  су слични, јер имају подударне углове. Заиста,  $\angle AOD = \angle BOC$  јер су то унакрсни углови и  $\angle ADO = \angle BCO$  (периферијски над луком  $\widehat{AB}$ ). Код сличних троуглова висине се односе исто као и странице, па је  $OQ : OP = BC : AD$  ( $OQ$  је висина троугла  $BOC$ , а  $OP$  је висина троугла  $AOD$ ). Дакле,  $MR : RN = BC : AD = QO : OP$  и  $\angle MRN = \angle QOP$ , па је  $\triangle MRN \sim \triangle QOP$ . Следи да је  $\angle RNM = \angle OPQ$  и  $\angle RMN = \angle OQP$ .

Означимо са  $K, L$  редом пресечне тачке праве  $RN$  са правима  $OP$  и  $QP$  и означимо са  $X$  пресечну тачку праве  $MN$  и праве  $PQ$ . Углови  $\angle KPL$  и  $\angle XNL$  су међусобно подударни, јер је  $\angle KPL = \angle OQP$  и

$\angle XNL = \angle MNR$ , а  $\angle OPQ = \angle MNR$ . Такође,  $\angle KLP = \angle XLN$ , јер су то унакрсни углови. Следи да троуглови  $\triangle PKL$  и  $\triangle NXL$  имају подударне углове, па је  $\angle LXN = \angle LKP$ . Међутим,  $\angle LKP = \frac{\pi}{2}$ , јер је то угао између праве  $NR$  и праве  $OP$ , а важи  $NR \perp OP$ . Према томе,  $\angle LXN = \frac{\pi}{2}$ , а то је угао између праве  $PQ$  и праве  $MN$ , па закључујемо да је  $MN \perp PQ$ .

**Дефиниција 15.** Нека је  $\mathcal{F}$  фамилија правих неке равни. Ако

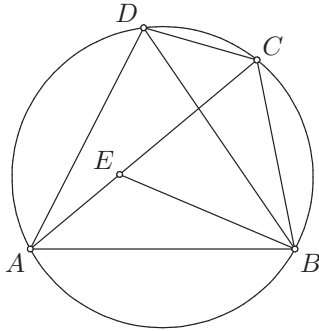
1) постоји тачка  $S$  која припада свим правима фамилије  $\mathcal{F}$  и све праве које садрже тачку  $S$  припадају фамилији  $\mathcal{F}$ ;

2) постоји права  $s$  која је паралелна свим правима фамилије  $\mathcal{F}$  и све праве које су паралелне правој  $s$  припадају фамилији  $\mathcal{F}$ ;

онда такву фамилију  $\mathcal{F}$  зовемо *праменом правих*. Ако прамен  $\mathcal{F}$  задовољава услов 1), кажемо да је то прамен *конкурентних* правих, а ако прамен  $\mathcal{F}$  задовољава услов 2), кажемо да је то прамен *паралелних* правих.

Праменови се у теорији дефинишу на другачији начин и тамо се детаљније изучавају. Нама је овде од интереса да за праве које се секу у једној тачки или су међусобно паралелне кажемо: „Праве припадају једном прамену”, или: „Праве припадају истом прамену”, јер је такво изражавање краће и једноставније.

## 5. Птоломејева теорема.



Идеја је да производ  $AC \cdot BD$  напишемо као збир два сабирка, од којих ће један бити једнак са  $AB \cdot CD$ , а други са  $AD \cdot BC$ . Ако на дијагонали  $AC$  уочимо неку тачку  $E$ , онда је  $AC = AE + EC$ , па је  $AC \cdot BD = (AE + EC) \cdot BD = AE \cdot BD + EC \cdot BD$ . Треба погодни одабрати тачку  $E$  тако да нпр. буде  $AE \cdot BD = AB \cdot CD$  и  $EC \cdot BD = AD \cdot BC$ , односно  $AE : CD = AB : BD$  и  $EC : AD = BC : BD$ . Зато узмемо тачку  $E$  на дијагонали  $AC$  такву да је  $\angle ABE = \angle DBC$ .

Како је  $\angle BAE = \angle BDC$  (периферијски над  $\widehat{BC}$ ) и  $\angle ABE = \angle DBC$ , следи да је  $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ , па је  $AE : DC = AB : DB$ . Дакле, важи  $AE \cdot BD = AB \cdot CD$ . Даље, имамо да је  $\angle ECB = \angle ADB$  (периферијски

над  $\widehat{AB}$ ) и  $\angle EBC = \angle EBD + \angle DBC = \angle EBD + \angle ABE = \angle ABD$ , па је  $\triangle EBC \sim \triangle ABD$ . Следи да је  $EC : AD = BC : BD$ , па добијамо  $EC \cdot BD = AD \cdot BC$ . Сабирањем добијамо да је

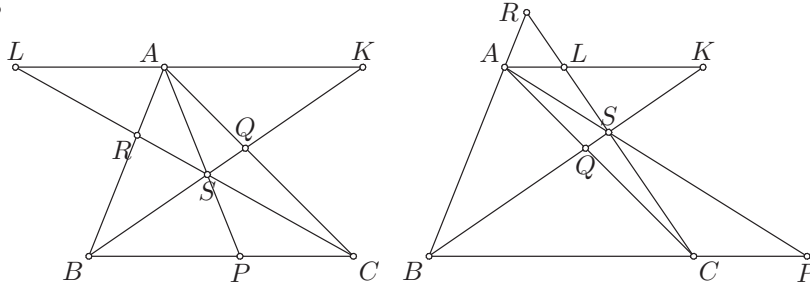
$$\begin{aligned} AE \cdot BD + EC \cdot BD &= AB \cdot CD + AD \cdot BC \\ (AE + EC) \cdot BD &= AB \cdot CD + AD \cdot BC \\ AC \cdot BD &= AB \cdot CD + AD \cdot BC, \end{aligned}$$

што је и требало доказати.

**Чевина теорема.** Означимо  $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$ . У формулацији теореме требало би додати услов да се тачке  $P, Q, R$  разликују од темена  $A, B, C$  троугла  $\triangle ABC$ , јер иначе број  $\Pi$  или није добро дефинисан (ако је нпр.  $P = C$ , онда није дефинисано  $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$ ), или је једнак 0 (ако је нпр.  $P = B$ ).

$\Rightarrow$ : Нека су  $AP, BQ, CR$  праве једног прамена.

1°



Нека је  $S$  заједничка пресечна тачка правих  $AP, BQ, CR$  и нека су  $K, L$  редом пресечне тачке праве  $BQ$  и праве  $CR$  са правом која садржи тачку  $A$  и паралелна је са  $BC$ . Тада је на основу Талесове теореме

$$\begin{aligned} \frac{BP}{PC} &= \frac{KA}{AL} \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{CB}{KA} \\ \frac{AR}{RB} &= \frac{AL}{CB}, \end{aligned}$$

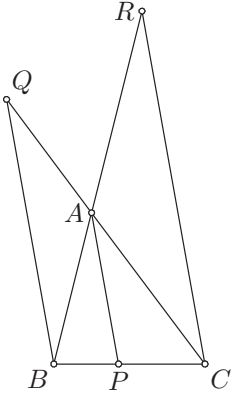
па добијамо да је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{KA}{AL} \cdot \frac{CB}{KA} \cdot \frac{AL}{CB} = 1.$$

Ако је тачка  $S$  у унутрашњости троугла  $\triangle ABC$ , онда тачке  $P, Q, R$  припадају редом *дужима*  $BC, CA, AB$ , па је  $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$ ,  $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$  и  $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$ . Дакле, тада је  $\Pi > 0$ . Тачка  $S$  не може припадати ни правој  $AB$ , ни правој  $AC$ , нити правој  $BC$ , јер ће тада нека од тачака  $P, Q, R$  бити теме

троугла. Према томе, тачка  $S$  не припада троуглу  $\triangle ABC$ , па остаје још случај када је у спољашњости троугла  $\triangle ABC$  (и, наравно, не припада ни правој  $AB$ , ни правој  $AC$  нити правој  $BC$ ). Тада ће тачно једна од тачака  $P, Q, R$  припадати одговарајућој дужи ( $BC, AC, AB$ ). Нпр. нека тачка  $Q$  припада дужи  $AC$ , као што је на слици. Тада је  $\frac{\overrightarrow{BP}}{PC} < 0$ ,  $\frac{\overrightarrow{CQ}}{QA} < 0$  и  $\frac{\overrightarrow{AR}}{RB} < 0$ , па је поново  $\Pi > 0$ . Слично добијамо да је  $\Pi > 0$  и у преостала два случаја ( $P$  припада дужи  $BC$ , односно  $R$  припада дужи  $AB$ ). Дакле, имамо  $\Pi > 0$  и  $|\Pi| = 1$ , па следи да је  $\Pi = 1$ .

2°



Нека су праве  $AP, BQ, CR$  међусобно паралелне. На основу Талесове теореме је

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{CB}{BP}$$

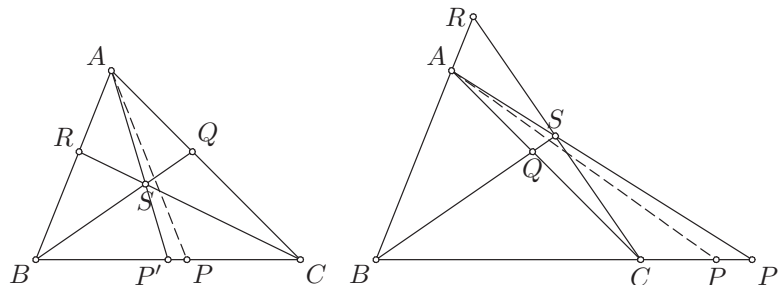
$$\frac{AR}{RB} = \frac{PC}{CB},$$

па је

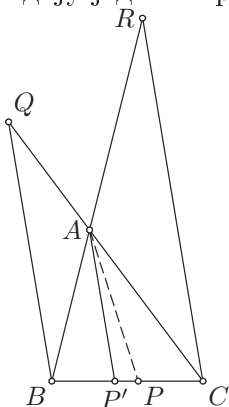
$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CB}{BP} \cdot \frac{PC}{CB} = 1.$$

Праве  $AP, BQ, CR$  морају бити такве да тачно две од њих не пролазе кроз унутрашњост троугла  $\triangle ABC$ , а трећа пролази. Стога тачно две од тачака  $P, Q, R$  припадају дужима  $BC, CA, AB$ , а трећа не припада. Нпр. ако права  $AP$  пролази кроз унутрашњост троугла  $\triangle ABC$ , онда праве  $BQ, CR$  не пролазе кроз унутрашњост троугла и тачка  $P$  припада дужи  $BC$ , а тачке  $Q, R$  не припадају дужима  $CA, AB$ . Следи да је  $\frac{\overrightarrow{BP}}{PC} > 0$ ,  $\frac{\overrightarrow{CQ}}{QA} < 0$  и  $\frac{\overrightarrow{AR}}{RB} < 0$ , па је  $\Pi > 0$ . Слично и у преостала два случаја (права  $BQ$  пролази кроз унутрашњост троугла  $\triangle ABC$ , односно права  $CR$  пролази кроз унутрашњост троугла  $\triangle ABC$ ) добијамо да је  $\Pi > 0$ . Дакле, важи  $\Pi > 0$  и  $|\Pi| = 1$ , па закључујемо да је  $\Pi = 1$ .

$\boxed{\Leftarrow}$  : Нека је  $\Pi = 1$ . Посматрајмо праве  $BQ$  и  $CR$ .  
1°



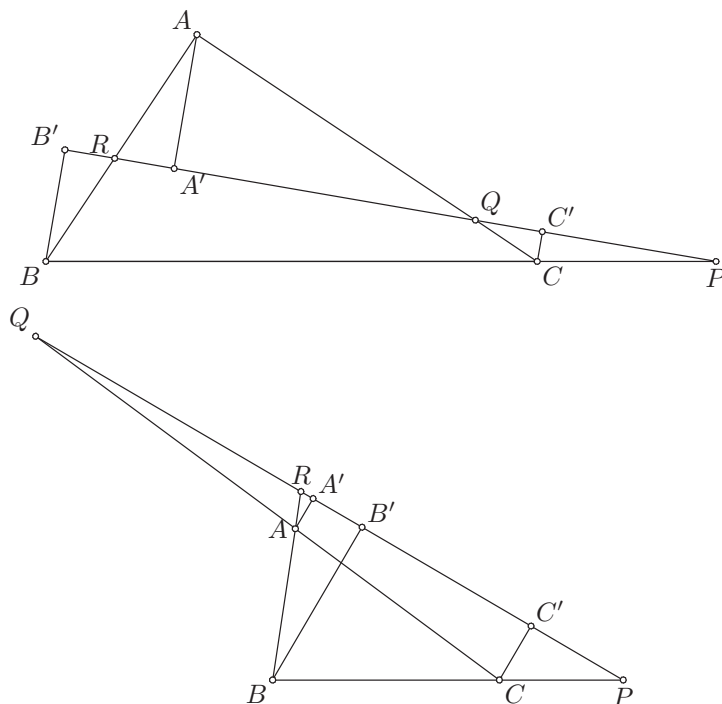
Нека се праве  $BQ$  и  $CR$  секу у тачки  $S$ . Означимо са  $P'$  пресечну тачку праве  $AS$  и праве  $BC$ . На основу дела  $\boxed{\Rightarrow}$  следи  $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$ . Такође, по претпоставци је  $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$ , па је  $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$ . Одавде следи да је  $P' = P$ , па се праве  $AP, BQ, CR$  секу у тачки  $S$ . Дакле,  $AP, BQ, CR$  припадају једном прамену.  
2°



Нека је  $BQ \parallel CR$ . Означимо са  $P'$  пресечну тачку праве која садржи тачку  $A$  и паралелна је са правом  $BQ$  (и правом  $CR$ ) и праве  $BC$ . На основу дела  $\boxed{\Rightarrow}$  следи  $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$ . Такође,  $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = 1$ , па је  $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$ . Одавде следи да је  $P' = P$ , па су праве  $AP, BQ, CR$  паралелне. Дакле, праве  $AP, BQ, CR$  припадају једном прамену.

**Менелајева теорема.** Означимо поново  $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$ . Слично као код формулације Чевине теореме, и у формулацији ове теореме требало би додати услов да се тачке  $P, Q, R$  разликују од темена  $A, B, C$  троугла  $\triangle ABC$  (из истих разлога као малопре, јер ће број  $\Pi$  бити недефинисан ако је нпр.  $P = C$  или ће бити једнак нули ако је нпр.  $P = B$ ).

$\boxed{\Rightarrow}$  : Нека су  $P, Q, R$  колинеарне и нека је  $p$  права која их садржи. Означимо са  $A', B', C'$  редом подножја нормала из тачака  $A, B, C$  на правој  $p$ . Тада су праве  $AA', BB', CC'$  паралелне, па на основу Талесове теореме имамо:



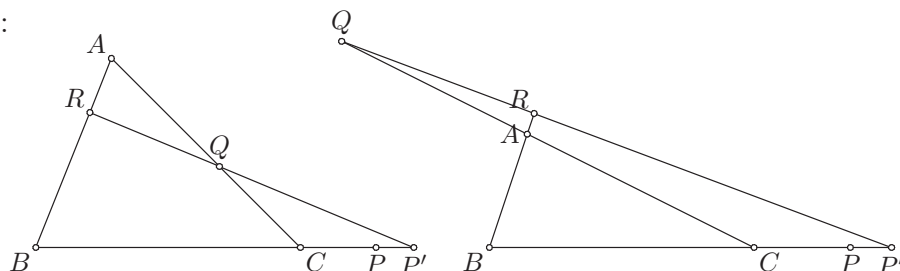
$$\begin{aligned}\frac{BP}{PC} &= \frac{BB'}{CC'} \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{CC'}{AA'} \\ \frac{AR}{RB} &= \frac{AA'}{BB'}.\end{aligned}$$

Следи да је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BB'}{CC'} \cdot \frac{CC'}{AA'} \cdot \frac{AA'}{BB'} = 1.$$

Како права  $p$  не садржи ниједно теме троугла  $A, B, C$  јер би иначе нека од тачака  $P, Q, R$  била теме троугла, на основу Пашове аксиоме закључујемо да или тачно две од тачака  $P, Q, R$  припадају одговарајућим дужима  $BC, CA, AB$  или ниједна од њих не припада одговарајућој дужи. Ако нпр. тачке  $Q, R$  припадају редом дужима  $CA, AB$ , важи  $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$ ,  $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$  и  $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$ , па је  $\Pi < 0$ . Слично, ако тачке  $P, Q$  припадају редом дужима  $BC, CA$  или ако тачке  $P, R$  припадају редом дужима  $BC, AB$ , следи да је  $\Pi < 0$ . Ако ниједна од тачака  $P, Q, R$  не припада одговарајућој дужи  $(BC, CA, AB)$ , важи  $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} < 0$ ,  $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} < 0$  и  $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} < 0$ , па је поново  $\Pi < 0$ . Закључујемо да је  $\Pi < 0$  и  $|\Pi| = 1$ , па је  $\Pi = -1$ .

$\boxed{\Leftarrow}$  :

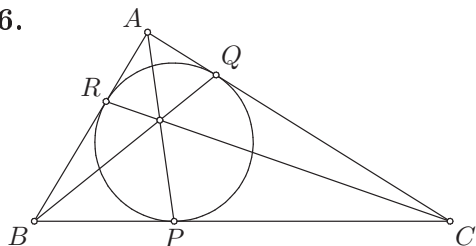


Нека је  $\Pi = -1$ . Означимо са  $P'$  пресечну тачку праве  $QR$  и праве  $BC$ . На основу дела  $\boxed{\Rightarrow}$  следи да је  $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$ . Такође, по претпоставци је  $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = -1$ , па следи да је  $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$ . Одавде следи да је  $P' = P$ , па су тачке  $P, Q, R$  колинеарне.

**Напомена 5.** Да би докази смерова  $\boxed{\Leftarrow}$  Чевине и Менелајеве теореме били до краја коректни, морали бисмо да докажемо да тачке  $P'$  постоје, тј. у случају 1° Чевине теореме да  $AS$  и  $BC$  нису паралелне, у случају 2° Чевине теореме да права која садржи  $A$  и паралелна је са  $BQ$  и  $CR$  није паралелна са  $BC$ , а у Менелајевој теорему да праве  $QR$  и  $BC$  нису паралелне. Међутим, то овде нећемо радити.

**Напомена 6.** У некој литератури се уместо израза „Чевина теорема“ може наћи и израз „Чеваова теорема“.

6.



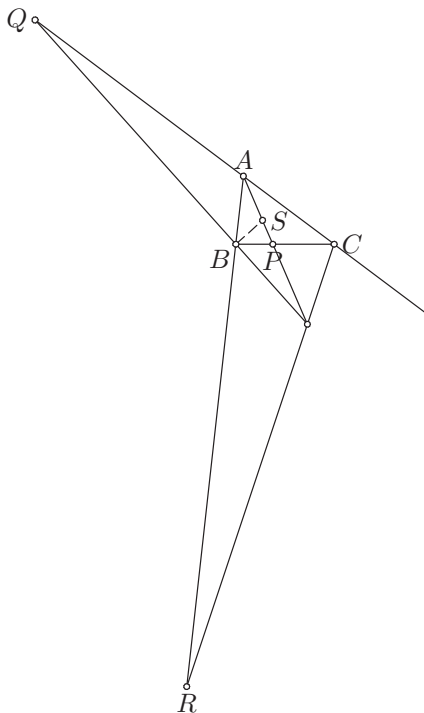
Нека је  $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$ . Тангентне дужи из тачака  $A, B, C$  на уписаном кругу троугла  $\triangle ABC$  су подударне ( $AQ = AR$ ,  $BR = BP$ ,  $CP = CQ$ ), па следи да је

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BR}{PC} \cdot \frac{CP}{QA} \cdot \frac{AQ}{RB} = 1.$$

Тачке  $P, Q, R$  припадају дужима  $BC, CA, AB$ , па следи да је  $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$ ,  $\frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} > 0$  и  $\frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} > 0$ . Одавде закључујемо да је  $\Pi > 0$ , па због  $|\Pi| = 1$  следи да је  $\Pi = 1$ . На основу Чевине теореме закључујемо да праве  $AP, BQ, CR$  припадају једном прамену. С обзиром на то да дужи  $BQ, CR$

припадају унутрашњости троугла  $\triangle ABC$ , оне се секу, па закључујемо да праве  $AP, BQ, CR$  припадају прамену конкурентних праве, тј. оне су конкурентне (секу се у једној тачки).

**Додатни задатак.** Доказати да се бисектриса једног унутрашњег и два спољашња угла троугла  $\triangle ABC$  секу у једној тачки.



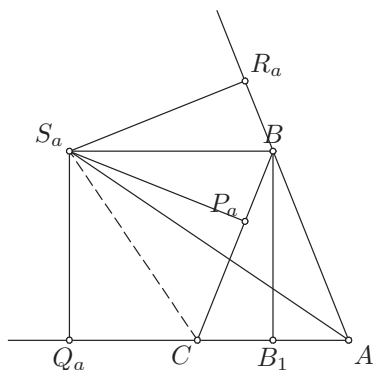
Нека је  $P$  пресечна тачка бисектрисе унутрашњег угла код темена  $A$  троугла  $\triangle ABC$  и странице  $BC$  и нека су  $Q, R$  редом пресечне тачке бисектриса спољашњих углова код темена  $B, C$  троугла  $\triangle ABC$  са правима  $CA, AB$ . Означимо  $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}}$ . На основу Теореме о симетрали угла (1. задатак) следи да је

$$\begin{aligned} \frac{BP}{PC} &= \frac{AB}{AC} \\ \frac{CQ}{QA} &= \frac{CB}{BA} \\ \frac{AR}{RB} &= \frac{AC}{CB}, \end{aligned}$$

па је  $|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CB}{BA} \cdot \frac{AC}{CB} = 1$ .

Бисектриса унутрашњег угла сече наспрамну страницу, па тачка  $P$  припада дужи  $BC$ , односно важи  $\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} > 0$ . С друге стране, бисектрисе

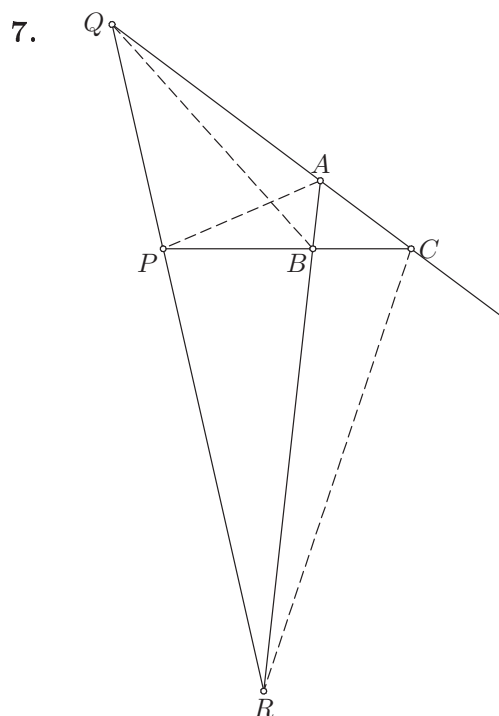
**Напомена 7.** Да би решење претходног задатка било коректно, треба се запитати да ли постоје тачке  $Q, R$ , тј. да ли може да се деси да симетрала спољашњег угла буде паралелна са насупрамном страницом. Ако је симетрала спољашњег угла код темена  $B$  паралелна са  $AC$ , онда је симетрала унутрашњег угла код темена  $B$  нормална на  $AC$ . Означимо са  $B_1$  пресечну тачку симетрале унутрашњег угла код темена  $B$  и праве  $AC$ . Тада су троуглови  $\triangle BB_1A$  и  $\triangle BB_1C$  подударни јер им је  $BB_1$  заједничка страница,  $\angle CBB_1 = \angle ABB_1 = \frac{\beta}{2}$  и  $\angle BB_1C = \angle BB_1A = \frac{\pi}{2}$ . Следи да је  $BC = BA$ , па је троугао  $\triangle ABC$  једнакокраки.



Доказали смо да симетрала унутрашњег угла код темена  $A$  није пара-

лелна са симетралом спољашњег угла код темена  $B$  (иначе је  $\gamma = 0$ ), па означимо са  $S_a$  њихову пресечну тачку и означимо са  $P_a, Q_a, R_a$  подножја нормала из  $S_a$  редом на правима  $BC, CA, AB$ . Пошто  $S_a$  припада симетрали унутрашњег угла код темена  $A$ , следи да је  $S_a R_a = S_a Q_a$ , а пошто  $S_a$  припада и симетрали спољашњег угла код темена  $B$ , следи да је  $S_a P_a = S_a R_a$ . Дакле,  $S_a Q_a = S_a P_a$ , па следи да  $S_a$  припада и симетрали спољашњег угла код темена  $C$  троугла  $\triangle ABC$ . Према томе, доказали смо да се и у овом случају симетрале једног унутрашњег и два спољашња угла секу у једној тачки.

Штавише, овај доказ може да се примени и у случају када троугао  $\triangle ABC$  није једнакокрак.



У напмени 7 утврдили смо да пресечна тачка симетрале спољашњег угла и наспрамне стране не постоји код једнакокракн троугла коме је та страна основица. Дакле, доказујемо тврђење задатка за све троуглове који нису једнакокраки, јер само код таквих троуглова постоје пресечне тачке симетрала спољашњих углова и наспрамних страна.

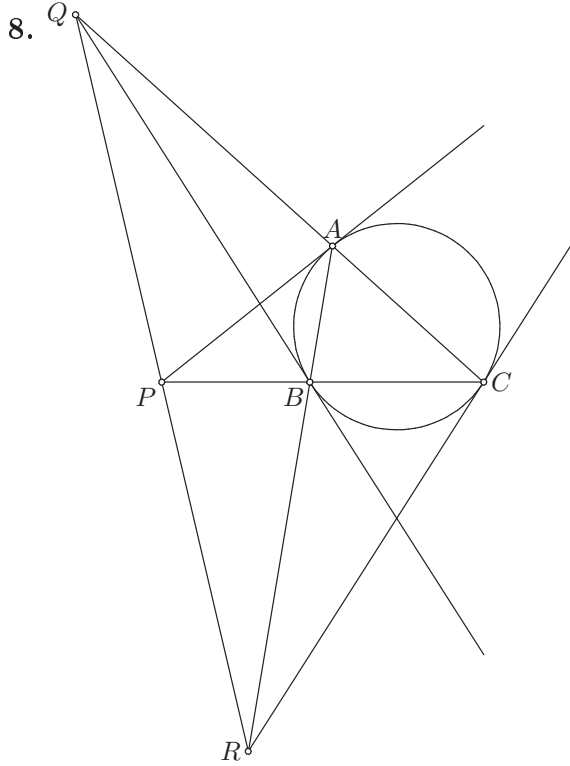
Нека су  $P, Q, R$  редом пресечне тачке симетрала спољашњих углова код темена  $A, B, C$  троугла  $\triangle ABC$  са правима  $BC, CA, AB$ . Означимо  $\Pi = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB}$ . На основу Теореме о симетрали угла следи да је

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{CB}{BA}$$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{AC}{CB},$$

па је  $|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CB}{BA} \cdot \frac{AC}{CB} = 1$ . Како симетрале спољашњих углова троугла припадају спољашњости троугла, следи да ниједна од тачака  $P, Q, R$  не припада одговарајућој дужи  $(BC, CA, AB)$ , па следи да је  $\frac{\overrightarrow{BP}}{PC} < 0$ ,  $\frac{\overrightarrow{CQ}}{QA} < 0$  и  $\frac{\overrightarrow{AR}}{RB} < 0$ . Дакле,  $\Pi < 0$  и  $|\Pi| = 1$ , па је  $\Pi = -1$ . На основу Менелајеве теореме следи да су тачке  $P, Q, R$  колинеарне.



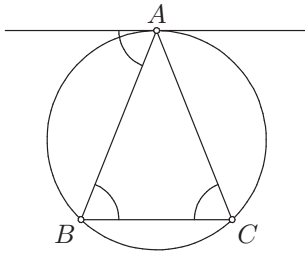
Нека су  $P, Q, R$  редом пресечне тачке тангенти у теменима  $A, B, C$  троугла  $\triangle ABC$  на његовом описаном кругу са правима  $BC, CA, AB$ . Означимо  $\Pi = \frac{\overrightarrow{BP}}{PC} \cdot \frac{\overrightarrow{CQ}}{QA} \cdot \frac{\overrightarrow{AR}}{RB}$ . Угао  $\angle PAB$  је угао између тангенте  $PA$  и тетиве  $AB$ , па је подударан с периферијским углом  $\angle ACB$  над том тетивом. Следи да је  $\angle PAB = \angle PCA (= \angle BCA)$ , а како је и  $\angle APB = \angle CPA$  (исти угао), следи да је  $\triangle PAB \sim \triangle PCA$ . Одавде је  $\frac{BP}{AP} = \frac{PA}{PC} = \frac{AB}{AC}$ , па следи да је  $\frac{BP}{PC} = \frac{BP}{AP} \cdot \frac{AP}{PC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$ . Слично,  $\angle QBA = \angle ACB$  (угао  $\angle QBA$  између тангенте  $QB$  и тетиве  $BA$  подударан је с периферијским углом  $\angle ACB$  над том тетивом) и  $\angle BQA = \angle BQC$  (исти угао), па је  $\triangle QBC \sim \triangle QAB$ . Следи  $\frac{CQ}{BQ} = \frac{QB}{QA} = \frac{BC}{AB}$ , па је  $\frac{CQ}{QA} = \frac{CQ}{BQ} \cdot \frac{BQ}{QA} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2$ .

Коначно,  $\angle RCB = \angle BAC$  (угао  $\angle RCB$  између тангенте  $RC$  и тетиве  $CB$  подударан је с периферијским углом  $\angle BAC$  над том тетивом) и  $\angle BRC = \angle ARC$  (исти угао), па је  $\triangle RAC \sim \triangle RCB$ . Следи да је  $\frac{AR}{CR} = \frac{RC}{RB} = \frac{AC}{CB}$ , па је  $\frac{AR}{RB} = \frac{AR}{CR} \cdot \frac{CR}{RB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$ . Према томе,

$$|\Pi| = \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \cdot \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 \cdot \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = 1.$$

Како тангенте  $AP, BQ, CR$  припадају спољашњости описаног круга троугла  $\triangle ABC$ , следи да оне припадају и спољашњости троугла  $\triangle ABC$ , па тачке  $P, Q, R$  не припадају одговарајућим дужима  $BC, CA, AB$ . Према томе,  $\frac{BP}{PC} < 0$ ,  $\frac{CQ}{QA} < 0$  и  $\frac{AR}{RB} < 0$ , па је и  $\Pi < 0$ . Дакле,  $\Pi = -1$ , па према Менелајевој теореме следи да су тачке  $P, Q, R$  колинеарне.

**Напомена 8.** Размотримо у ком случају је нека од тангенти паралелна са насупрамном страницом, нпр. када је тангента у темену  $A$  троугла  $\triangle ABC$  на његовом описаном кругу паралелна са  $BC$ .



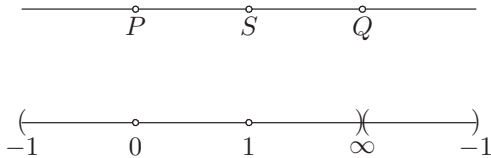
Назначени угао између тангенте и тетиве  $AB$  подударан је с периферијским углом  $\angle ACB$  над том тетивом, а с друге стране подударан је с углом  $\angle ABC$ , јер су то углови с паралелним крацима. Закључујемо да је  $\angle ACB = \angle ABC$ , па је троугао  $\triangle ABC$  једнакокраки с основicom  $BC$ . Дакле, задатак се могао решавати само за троуглове  $\triangle ABC$  који нису једнакокраки, јер иначе не постоји нека од тачака  $P, Q, R$ .

Размотримо сада поделу дужи у неком односу. Ако су  $P, Q$  две разне тачке и  $\lambda \in \mathbb{R}$ , занима нас колико постоји тачака  $R$  таквих да је  $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = \lambda$ . Ако је  $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = \lambda$ , онда је  $\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{RQ}$ , тј.  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ} = (\lambda + 1) \overrightarrow{RQ}$ . Према томе, ако је  $\lambda = -1$ , онда добијамо да је  $\overrightarrow{PQ} = 0 \cdot \overrightarrow{RQ} = \mathbf{0}$  (нула вектор), одакле следи да је  $P = Q$ , а то је у супротности с претпоставком да су то две различите тачке. Дакле, не постоји тачка  $R$  таква да је  $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -1$ . А ако је  $\lambda \neq -1$ , онда је  $\overrightarrow{RQ} = \frac{1}{\lambda + 1} \overrightarrow{PQ}$ , тј.  $\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{RQ} = \frac{\lambda}{\lambda + 1} \overrightarrow{PQ}$ , што једнозначно одређује тачку  $R$ .

Дакле, ако су  $P, Q$  две разне тачке, за свако  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  постоји јединствена тачка  $R$  таква да је  $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = \lambda$ . Сада имамо оправдање зашто смо у доказу Чевине и Менелајеве теореме у смеру  $\boxed{\Leftarrow}$  користили да из  $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$  следи да је  $P' = P$  (овде једнаки односи  $\frac{\overrightarrow{BP'}}{\overrightarrow{P'C}} = \frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}}$  нису једнаки  $-1$ , јер тачке  $P, P'$  постоје).

Продискутујмо сада о положају тачке  $R$  у зависности од броја  $\lambda$ . Ако је  $\lambda > 0$ , онда су вектори  $\overrightarrow{PR}$  и  $\overrightarrow{RQ}$  истог смера, па се тачка  $R$  налази између тачака  $P$  и  $Q$  (важи  $\mathcal{B}(P, R, Q)$ ), тј. тачка  $R$  припада дужи  $PQ$ . Ако је  $\lambda = 0$ , онда је  $\overrightarrow{PR} = \mathbf{0}$ , односно важи  $R = P$ . Ако је  $\lambda = 1$ , онда је  $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RQ}$ , па је  $R$  средиште дужи  $PQ$ . Ако је  $0 < \lambda < 1$ , онда тачка  $R$  припада дужи  $PQ$  и дуж  $PR$  је краћа од дужи  $RQ$ , што значи да се тачка  $R$  налази између тачке  $P$  и средишта дужи  $PQ$ . Ако је  $\lambda > 1$ , онда тачка  $R$  припада дужи  $PQ$  и дуж  $PR$  је дужа од дужи  $RQ$ , па се тачка  $R$  налази између средишта дужи  $PQ$  и тачке  $Q$ . Ако је  $-1 < \lambda < 0$ , онда тачка  $R$  не припада дужи  $PQ$  (вектори  $\overrightarrow{PR}$  и  $\overrightarrow{RQ}$  су супротних смерова због  $\lambda < 0$ ), а дуж  $PR$  је краћа од дужи  $RQ$ , јер је  $\frac{PR}{RQ} = |\lambda| \in (0, 1)$ , па следи да важи распоред  $\mathcal{B}(R, P, Q)$  (тада је  $RQ = RP + PQ > PR$ ). Коначно, ако је  $\lambda < -1$ , поново због  $\lambda < 0$  следи да тачка  $R$  не припада дужи  $PQ$ , а због  $\lambda < -1$  следи да је  $\frac{PR}{RQ} = |\lambda| > 1$ , па је дуж  $PR$  дужа од дужи  $RQ$ . Следи распоред  $\mathcal{B}(P, Q, R)$ , јер је тада  $PR = PQ + QR > RQ$ .

Графички, положај тачке  $R$  у зависности од броја  $\lambda$  изгледа овако:



При томе, симбол  $\infty$  који стоји на месту тачке  $Q$  означава граничне вредности када се тачка  $R$  приближава тачки  $Q$ . Ако се тачка  $R$  приближава тачки  $Q$  тако да важи  $\mathcal{B}(P, R, Q)$ , онда је та гранична вредност позитивна, тј. симбол  $\infty$  означава граничну вредност  $+\infty$ , а ако јој се приближава тако да важи распоред  $\mathcal{B}(P, Q, R)$ , онда је та гранична вредност негативна, тј. симбол  $\infty$  означава граничну вредност  $-\infty$ . Такође, знамо да вредности  $\lambda = -1$  не одговара ниједна тачка (и обратно), али важи следеће: Што се више удаљавамо од дужи  $PQ$ , њена дужина постаје занемарљива, па се дужине дужи  $PR$  и  $RQ$  приближавају једна другој, а због распореда  $\mathcal{B}(R, P, Q)$ , односно распореда  $\mathcal{B}(P, Q, R)$ , имамо да је однос вектора  $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$  негативан, па он тежи ка  $-1$ .

За свако  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \neq 1$  јављају се парови тачака  $R, S$  који деле дуж  $PQ$

у односу  $\lambda$ , тј. важи  $PR : RQ = PS : SQ = \lambda$ . При томе је, нпр.  $\frac{\overrightarrow{PR}}{RQ} = \lambda$  и  $\frac{\overrightarrow{PS}}{SQ} = -\lambda$ . У случајевима  $\lambda = 1$  и  $\lambda = 0$  имамо само по једну тачку која дели дуж  $PQ$  у одговарајућем односу (средиште дужи  $PQ$ , односно тачка  $P$ ). Нас ће од сада занимати четворке различитих колинеарних тачака  $P, Q, R, S$  за које је  $PR : RQ = PS : SQ$ .

**Дефиниција 16.** Нека су  $P, Q, R, S$  четири различите колинеарне тачке. Пар тачака  $(P, Q)$  је *хармонијски спрегнути* с паром тачака  $(R, S)$  ако је  $\frac{\overrightarrow{PR}}{RQ} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{SQ}$  и пишемо  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ .



Наравно, стављамо услов  $\frac{\overrightarrow{PR}}{RQ} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{SQ}$ , јер једино тако можемо имати да су  $R$  и  $S$  различите тачке, а да деле дуж  $PQ$  у истом односу.

Следе неке особине релације хармонијске спрегнутости. Најпре, та релација је симетрична у следећем смислу. Ако је  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ , онда је  $\mathcal{H}(P, Q; S, R)$ ,  $\mathcal{H}(Q, P; R, S)$ ,  $\mathcal{H}(Q, P; S, R)$ , односно небитан је да ли је у питању пар  $(P, Q)$  или пар  $(Q, P)$ , као и да ли је у питању пар  $(R, S)$  или пар  $(S, R)$ . Такође, ако је  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ , онда је  $\mathcal{H}(R, S; P, Q)$ , тј. ако је пар  $(P, Q)$  хармонијски спрегнут с паром  $(R, S)$ , онда је и пар  $(R, S)$  хармонијски спрегнут с паром  $(P, Q)$ . Докажимо ове особине.

Ако је  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ , онда је  $\frac{\overrightarrow{PR}}{RQ} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{SQ}$ . Заменом места разломцима на левој и десној страни једнакости добијамо  $\frac{\overrightarrow{PS}}{SQ} = -\frac{\overrightarrow{PR}}{RQ}$ , што по дефиницији даје  $\mathcal{H}(P, Q; S, R)$ . Множењем бројилаца и именилаца с леве и десне стране једнакости бројем  $-1$  добијамо да је  $\frac{-\overrightarrow{PS}}{-SQ} = -\frac{-\overrightarrow{PR}}{-RQ}$ , односно да је  $\frac{\overrightarrow{SP}}{QS} = -\frac{\overrightarrow{RP}}{QR}$ . Како су тачке  $P, Q, R, S$  међусобно различите, ниједан од ових вектора није нула вектор, па ни бројеви с леве и десне стране једнакости нису једнаки  $0$ , што значи да можемо узети њивове инверзе и они ће такође бити једнаки. Добијамо да је  $\frac{\overrightarrow{QS}}{SP} = -\frac{\overrightarrow{QR}}{RP}$ , а то по дефиницији значи да је  $\mathcal{H}(Q, P; S, R)$ . Поновном заменом места разломцима на левој и десној страни једнакости добијамо  $\mathcal{H}(Q, P; R, S)$ .

Ако је  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ , онда је  $\frac{\overrightarrow{PR}}{RQ} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{SQ} = \lambda$ . Следи да је  $\overrightarrow{PR} = \lambda \overrightarrow{RQ}$  и  $\overrightarrow{PS} = -\lambda \overrightarrow{SQ} = \lambda \overrightarrow{QS}$ . Вектори  $\overrightarrow{RP}$  и  $\overrightarrow{PS}$  су колинеарни и ниједан од њих није нула вектор, па следи да је  $\lambda \neq 0$  и постоји однос тих вектора који је једнак  $\frac{\overrightarrow{RP}}{PS} = \frac{-\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{PS}} = \frac{-\lambda \overrightarrow{RQ}}{\lambda \overrightarrow{QS}} = -\frac{\overrightarrow{RQ}}{\overrightarrow{QS}}$ . Следи да је  $\mathcal{H}(R, S; P, Q)$ .

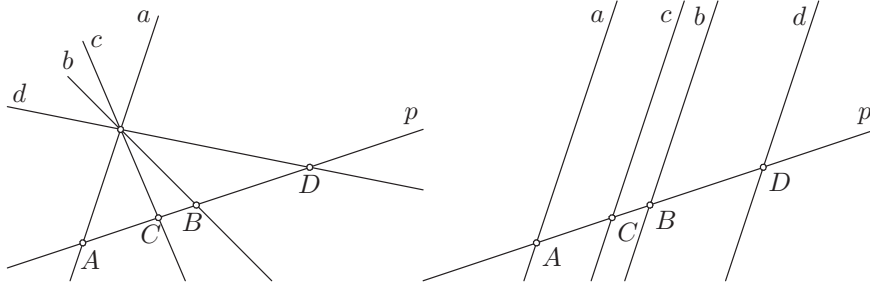
Даље, ако су  $P, Q, R$  три разне колинеарне тачке и  $R$  није средиште дужи  $PQ$ , тада постоји јединствена тачка  $S$  таква да је  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ .

Заиста, тада је  $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \notin \{0, 1\}$ , па постоји јединствена тачка  $S$  таква да је  $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = -\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$  (због  $-\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \neq -1$  следе постојање и јединственост тачке  $S$ ). Због  $-\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \neq 0$  следи да је  $S$  различита од  $P$ , а наравно мора бити и  $S \neq Q$  и  $S \neq R$ , па је заиста  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ .

Ако је  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ , онда важи тачно један од распореда тачака  $\mathcal{B}(P, R, Q)$  и  $\mathcal{B}(P, S, Q)$ . Заиста, из  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$  следи  $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} = \lambda$ . Како због различитости тачака  $P, Q, R, S$  важи  $\lambda \neq 0$ , следи да је тачно један од односа  $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}}$  и  $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$  позитиван (други је наравно негативан). Ако је  $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} > 0$ , онда је  $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} < 0$ , па важи  $\mathcal{B}(P, R, Q)$  и не важи  $\mathcal{B}(P, S, Q)$ . Ако је  $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} < 0$ , онда је  $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} > 0$ , па важи  $\mathcal{B}(P, S, Q)$  и не важи  $\mathcal{B}(P, R, Q)$ . Према томе, важи тачно један од распореда тачака  $\mathcal{B}(P, R, Q)$  и  $\mathcal{B}(P, S, Q)$ .

Дефинисаћемо и хармонијску спрегнутост парова правих.

**Дефиниција 17.** Нека праве  $a, b, c, d$  припадају једном прамену. Кажемо да је пар  $(a, b)$  *хармонијски спређути* с паром  $(c, d)$  ако постоји права  $p$  таква да је  $p \cap a = \{A\}$ ,  $p \cap b = \{B\}$ ,  $p \cap c = \{C\}$ ,  $p \cap d = \{D\}$  и важи  $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ . Тада пишемо  $\mathcal{H}(a, b; c, d)$ .

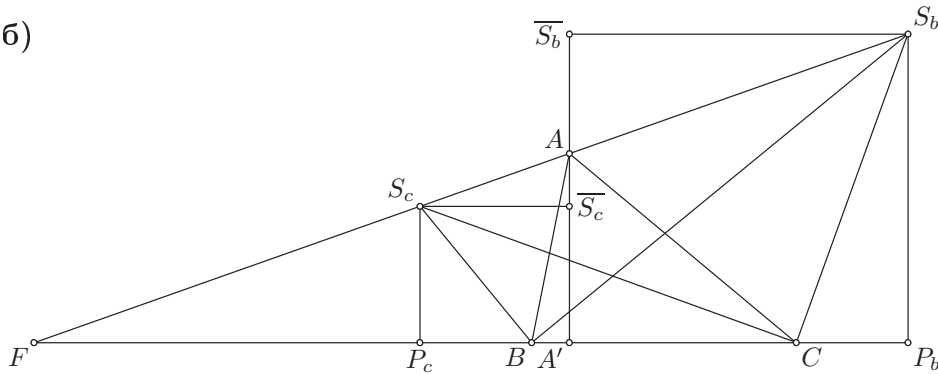


Да би дефиниција била коректна, требало би доказати да ова особина не зависи од избора праве  $p$ . То нећемо радити. Навешћемо само једну особину без доказа. Ако су  $a, b, c, d$  праве конкурентног прамена (конкурентне праве) и  $c \perp d$ , важи  $\mathcal{H}(a, b; c, d)$  ако и само су  $c$  и  $d$  симетрале углова који граде праве  $a$  и  $b$  (има их два и треба да  $c$  буде симетрала једног од њих, а  $d$  симетрала оног другог).

Због доказане симетричности релације хармонијске спрегнутости парова тачака, следи и симетричност релације хармонијске спрегнутости парова правих. Такође, често уместо „пар  $(P, Q)$  је хармонијски спрегнут с паром  $(R, S)$ ” или „парови  $(P, Q)$  и  $(R, S)$  су хармонијски спрегнути” кажемо и „тачке  $P, Q, R, S$  су хармонијски спрегнуте”. Слично, често кажемо „праве  $a, b, c, d$  су хармонијски спрегнуте”.



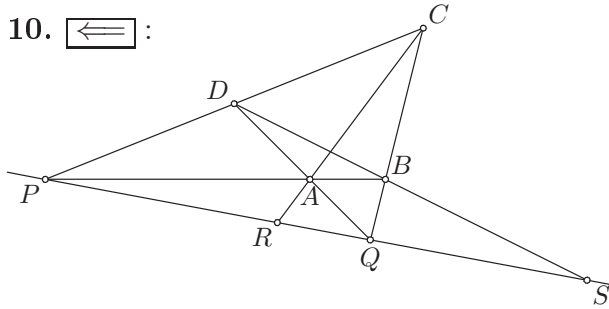
б)



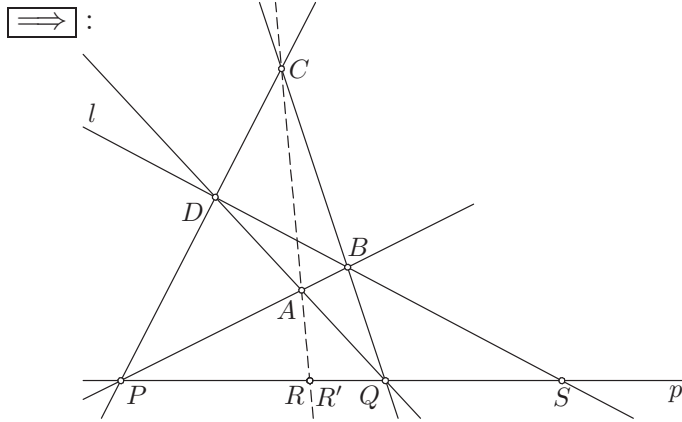
Тачке  $S_b, S_c$  су центри споља уписаних кругова који додирују редом странице  $AC, AB$ , а тачка  $F$  је пресечна тачка симетрале спољашњег угла код темена  $A$  и (наспрамне) странице  $BC$ . На основу Теореме о симетрали угла (1. задатка) следи  $AS_c : S_cF = AS_b : S_bF (= AB : BF)$ . У зависности од тога да ли је  $AB < AC$  или  $AB > AC$  важи распоред  $\mathcal{B}(F, S_c, A, S_b)$  или распоред  $\mathcal{B}(F, S_b, A, S_c)$  (не може бити  $AB = AC$ , јер је тада симетрала спољашњег угла код темена  $A$  паралелна с правом  $BC$  и не постоји тачка  $F$ ), па су односи  $\frac{\overrightarrow{AS_b}}{\overrightarrow{S_bF}}$  и  $\frac{\overrightarrow{AS_c}}{\overrightarrow{S_cF}}$  супротних знакова. Дакле,  $\frac{\overrightarrow{AS_b}}{\overrightarrow{S_bF}} = -\frac{\overrightarrow{AS_c}}{\overrightarrow{S_cF}}$ , па важи  $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$ .

Нормалним пројектовањем тачке  $F, S_c, A, S_b$  пројектују се у тачке  $F, P_c, A', P_b$  на правој  $BC$  и у тачке  $A', \overline{S_c}, A, \overline{S_b}$  на правој  $AA'$ , па из  $\mathcal{H}(A, F; S_b, S_c)$  следе  $\mathcal{H}(A', F; P_b, P_c)$  и  $\mathcal{H}(A, A'; \overline{S_b}, \overline{S_c})$ .

10.  $\boxed{\Leftarrow}$  :



Нека су  $A, B, C, D$  четири разне тачке у равни и нека постоје тачке  $\{P\} = AB \cap CD$ ,  $\{Q\} = BC \cap AD$ ,  $\{R\} = PQ \cap AC$ ,  $\{S\} = PQ \cap BD$ . Посматрајмо троугао  $\triangle PQC$ , тачке  $R, B, D$  редом на његовим страницама  $PQ, QC, CP$  и тачку  $S$  на правој  $PQ$ . Праве  $PB, QD, CR$  секу се у тачки  $A$ , па оне припадају једном прамену. Према Чевиној теореме следи да је  $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{QB}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DP}} = 1$ . Такође, тачке  $S, B, D$  су колинеарне, па је према Менелајевој теореме  $\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}} \cdot \frac{\overrightarrow{QB}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DP}} = -1$ . Следи да је  $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{QB}} \cdot \frac{\overrightarrow{DP}}{\overrightarrow{CD}} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{\overrightarrow{SQ}}$ , па важи  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ .



Нека су  $P, Q, R, S$  хармонијски спрегнуте тачке (важи  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ ). Означимо са  $p$  праву која садржи тачке  $P, Q, R, S$ . Треба пронаћи неке четири тачке  $A, B, C, D$  у некој равни која садржи праву  $p$  тако да важи  $\{P\} = AB \cap CD$ ,  $\{Q\} = BC \cap AD$ ,  $\{R\} = PQ \cap AC$ ,  $\{S\} = PQ \cap BD$ . Одаберимо произвољну праву  $l$  која садржи тачку  $S$  и различита је од праве  $p$  и одаберимо на њој произвољне две разне тачке  $B, D$  различите од тачке  $S$  такве да  $PB \nparallel QD$  и  $PD \nparallel QB$  (убрзо ћемо видети зашто морамо наметнути баш ова два услова). Како желимо да одаберемо тачке  $A, C$  тако да буде  $\{P\} = AB \cap CD$  и  $\{Q\} = BC \cap AD$ , добијамо да тачка  $A$  мора припадати правима  $PB$  и  $QD$  и да тачка  $C$  мора припадати правима  $PD$  и  $QB$ . Из тих разлога нека је  $\{A\} = PB \cap QD$  и  $\{C\} = PD \cap QB$  (дакле, морамо наметнути услове  $PB \nparallel QD$  и  $PD \nparallel QB$  да би постојали пресеци тих правих).

Сада имамо четири тачке  $A, B, C, D$  и треба још проверити да ли је  $\{P\} = AB \cap CD$ ,  $\{Q\} = BC \cap AD$ ,  $\{R\} = PQ \cap AC$ ,  $\{S\} = PQ \cap BD$ . Прве две једнакости важе јер смо бирали тачке  $A, C$  тако да оне важе. Такође, важи и четврта једнакост ( $\{S\} = PQ \cap BD$ ) јер смо тако бирали тачке  $B, D$ . Треба још проверити да ли је  $\{R\} = PQ \cap AC$ . Означимо пресек правих  $PQ$  и  $AC$  са  $R'$ . На основу дела  $\Leftarrow$  следи да важи  $\mathcal{H}(P, Q; R', S)$ , односно  $\frac{\overrightarrow{PR'}}{R'Q} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{SQ}$ . По претпоставци важи и  $\mathcal{H}(P, Q; R, S)$ , односно  $\frac{\overrightarrow{PR}}{RQ} = -\frac{\overrightarrow{PS}}{SQ}$ . Дакле, следи  $\frac{\overrightarrow{PR'}}{R'Q} = \frac{\overrightarrow{PR}}{RQ}$ , па је  $R' = R$ . Према томе, важи и  $\{R\} = PQ \cap AC$ .

**Дефиниција 18.** Нека су  $A, B, C$  три колинеарне тачке. Дефинишемо израз  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  на следећи начин:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \cdot AC, & \text{ако није } \mathcal{B}(B, A, C) \\ -AB \cdot AC, & \text{ако јесте } \mathcal{B}(B, A, C) \end{cases}.$$

11. Овај задатак решићемо на два начина.

**I начин:** Докажимо прво да и из  $\mathcal{H}(A, B; C, D)$  и из  $AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$  следи  $C, D \ddot{=} O$ . Ако важи  $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ , онда је  $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} = \lambda$ , односно  $AC : CB = AD : DB = |\lambda|$ . Знамо да је  $|\lambda| \neq 0$  јер су  $A, B, C, D$  разне тачке и  $|\lambda| \neq 1$  јер иначе не би постојала нека од тачака  $C, D$  (сетимо се да не постоји тачка  $R$  таква да је  $\frac{\overrightarrow{PR}}{\overrightarrow{RQ}} = -1$  за две разне тачке  $P, Q$ ).

1°  $|\lambda| > 1$

Следи да је  $AC > CB$  и  $AD > DB$ . Ако важи  $\mathcal{B}(A, C, B)$ , онда је  $AB = AC + CB < AC + AC = 2AC$ , тј.  $AC > \frac{1}{2}AB = AO$ , па мора бити  $\mathcal{B}(A, O, C, B)$ . Такође, онда не важи  $\mathcal{B}(A, D, B)$ , а не може бити  $\mathcal{B}(D, A, O, B)$  јер је тада  $AD < DB$ , па важи  $\mathcal{B}(A, O, B, D)$ . Према томе,  $C, B \ddot{=} O$  и  $B, D \ddot{=} O$ , па следи  $C, D \ddot{=} O$ . Ако не важи  $\mathcal{B}(A, C, B)$ , онда важи  $\mathcal{B}(A, D, B)$ , па применимо претходно закључивање, с тим што слова  $C, D$  мењају места. Дакле,  $AB = AD + DB < AD + AD = 2AD$ , тј.  $AD > \frac{1}{2}AB = AO$ , па следи  $\mathcal{B}(A, O, D, B)$ . Не важи  $\mathcal{B}(C, A, O, B)$  је тада  $AC < CB$ , па важи  $\mathcal{B}(A, O, B, C)$ . Дакле,  $D, B \ddot{=} O$  и  $B, C \ddot{=} O$ , па следи  $C, D \ddot{=} O$ .

2°  $0 < |\lambda| < 1$

Применићемо слично закључивање као малопре, с тим што ће сада слова  $A, B$  заменити места. Прво закључујемо  $AC < CB$  и  $AD < DB$ . Ако важи  $\mathcal{B}(A, C, B)$ , онда је  $2AC = AC + AC < AC + CB = AB$ , тј.  $AC < \frac{1}{2}AB = AO$ , па мора бити  $\mathcal{B}(A, C, O, B)$ . Такође, онда не важи  $\mathcal{B}(A, D, B)$ , а не може бити  $\mathcal{B}(A, O, B, D)$  јер је тада  $AD > DB$ , па важи  $\mathcal{B}(D, A, O, B)$ . Према томе,  $C, A \ddot{=} O$  и  $A, D \ddot{=} O$ , па следи  $C, D \ddot{=} O$ . Ако не важи  $\mathcal{B}(A, C, B)$ , онда важи  $\mathcal{B}(A, D, B)$ , па заменом места словима  $C, D$  поново добијамо  $C, D \ddot{=} O$ .

Ако је  $AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$ , онда је  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} > 0$ , па по дефиницији израза  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$  следи да не важи  $\mathcal{B}(C, O, D)$  (иначе је  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = -OC \cdot OD \leq 0$ ). Ако би било  $C = O$  или  $D = O$ , онда би било  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$ , што није могуће, јер је  $AO^2 > 0$ . Дакле,  $C \neq O$ ,  $D \neq O$  и не важи  $\mathcal{B}(C, O, D)$ , па по дефиницији следи  $C, D \ddot{=} O$ .

Тражену еквиваленцију  $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$  нећемо доказивати у два смера ( $\boxed{\implies}$  и  $\boxed{\impliedby}$ ), већ ћемо је доказати директно. Ако не важи  $C, D \ddot{=} O$ , онда не важи ни  $\mathcal{H}(A, B; C, D)$  ни  $AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$ , па важи еквиваленција  $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$  (сетимо се из логике да је израз  $\perp \iff \perp$  тачан). Претпоставимо зато да је  $C, D \ddot{=} O$  и докажимо тражену еквиваленцију у том случају.

Доказ се своди на разматрање распореда тачака  $A, B, C, D, O$ . Увек важи  $\mathcal{B}(A, O, B)$  јер је  $O$  средиште дужи  $AB$ , а увели смо претпоставку

$C, D \div O$  ради смањивања броја случајева које треба размотрити.

1°  $\mathcal{B}(A, O, C)$ , тј.  $A, C \div O$



Због претпоставке  $C, D \div O$  следи  $A, D \div O$ , тј. важи  $\mathcal{B}(A, O, D)$ . Такође,  $A, B \div O$ , па важи  $B, C, D \div O$ . По дефиницији важи еквиваленција  $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$ . Такође, ако важи  $\mathcal{H}(A, B; C, D)$ , онда важи тачно један од распореда  $\mathcal{B}(A, C, B)$  и  $\mathcal{B}(A, D, B)$ , а пошто важе распореди  $\mathcal{B}(A, O, C)$  и  $\mathcal{B}(A, O, D)$ , следи да важи тачно један од распореда  $\mathcal{B}(A, O, C, B, D)$  и  $\mathcal{B}(A, O, D, B, C)$ . Све у свему, важи распоред  $\mathcal{B}(C, B, D)$ , па  $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \implies \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$  и  $\mathcal{B}(C, B, D)$ . Обратно, ако важи  $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$  и  $\mathcal{B}(C, B, D)$ , онда су вектори  $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DB}$  супротних смерова, а због  $\mathcal{B}(A, O, C)$  и  $\mathcal{B}(A, O, D)$  су вектори  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  истог смера, па важи и  $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$ . Дакле,  $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \iff \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$  и  $\mathcal{B}(C, B, D)$ .

Ово је даље еквивалентно са  $AC \cdot DB = AD \cdot CB$  и  $\mathcal{B}(C, B, D)$ . Важи  $AC = AO + OC$  и  $AD = AO + OD$ , а у зависности од тога да ли важи  $\mathcal{B}(O, C, B, D)$  или  $\mathcal{B}(O, D, B, C)$ , биће  $DB = OD - OB$ ,  $CB = OB - OC$  или  $DB = OB - OD$ ,  $CB = OC - OB$ . Међутим, у оба случаја имамо

$$\begin{aligned} AC \cdot DB &= AD \cdot CB \quad \text{и} \quad \mathcal{B}(C, B, D) \\ \iff (AO + OC) \cdot (OD - OB) &= (AO + OD) \cdot (OB - OC). \end{aligned}$$

Заиста, ако важи  $\mathcal{B}(O, C, B, D)$ , онда еквиваленција важи тривијално, а ако важи  $\mathcal{B}(O, D, B, C)$ , онда множењем леве и десне стране једнакости  $(AO + OC) \cdot (OD - OB) = (AO + OD) \cdot (OB - OC)$  са  $-1$  добијамо еквивалентну једнакост  $(AO + OC) \cdot (OB - OD) = (AO + OD) \cdot (OC - OB)$ , а то је у ствари  $AC \cdot DB = AD \cdot CB$ . Даље, имајући у виду да важи  $AO = OB$ , добијамо еквивалентне једнакости

$$\begin{aligned} AO \cdot OD - AO \cdot OB + OC \cdot OD - OC \cdot OB &= \\ = AO \cdot OB - AO \cdot OC + OD \cdot OB - OD \cdot OC &= \\ AO \cdot OD - AO \cdot AO + OC \cdot OD - OC \cdot AO &= \\ = AO \cdot AO - AO \cdot OC + OD \cdot AO - OD \cdot OC &= \\ -AO^2 + OC \cdot OD &= AO^2 - OD \cdot OC \\ 2AO^2 &= 2OC \cdot OD \\ AO^2 &= OC \cdot OD. \end{aligned}$$

Коначно, како смо претпоставили да важи  $C, D \div O$ , имамо да важи  $OC \cdot OD = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$ , па на крају имамо и еквиваленцију са  $AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$ .

Према томе, важи  $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$ .  
 $2^\circ \neg \mathcal{B}(A, O, C)$ , тј.  $A, C \div O$



Како увек важи  $\mathcal{B}(A, O, B)$ , тј.  $A, B \div O$ , следи да важи  $B, C \div O$ , тј.  $\mathcal{B}(B, O, C)$ . Следи да можемо применити целокупно закључивање из претходног случаја, при томе мењајући места словима  $A, B$ . Прво због претпоставке  $C, D \div O$  следи да важи  $B, D \div O$ , тј.  $\mathcal{B}(B, O, D)$ . Из  $A, C \div O$  следи и  $A, D \div O$ , па важи  $A, C, D \div O$ . По дефиницији имамо да важи еквиваленција  $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$ . Такође, из  $\mathcal{H}(A, B; C, D)$  следи да важи тачно један од распореда  $\mathcal{B}(A, C, B)$  и  $\mathcal{B}(A, D, B)$ , а пошто важе распореди  $\mathcal{B}(B, O, C)$  и  $\mathcal{B}(B, O, D)$ , следи да важи тачно један од распореда  $\mathcal{B}(C, A, D, O, B)$  и  $\mathcal{B}(D, A, C, O, B)$ . Дакле, свакако важи распоред  $\mathcal{B}(C, A, D)$ . Овим смо доказали да важи  $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \implies \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$  и  $\mathcal{B}(C, A, D)$ . Обратно, ако важи  $\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$  и  $\mathcal{B}(C, A, D)$ , онда су вектори  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$  супротних смерова, а због  $\mathcal{B}(B, O, C)$  и  $\mathcal{B}(B, O, D)$  су вектори  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$  истог смера, па важи и  $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$ . Дакле,  $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \iff \frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DB}$  и  $\mathcal{B}(C, A, D)$ .

Даље имамо еквиваленцију са  $AC \cdot DB = AD \cdot CB$  и  $\mathcal{B}(C, A, D)$ . Важи  $DB = DO + OB$  и  $CB = CO + OB$ , а у зависности од тога да ли важи распоред  $\mathcal{B}(C, A, D, O)$  или  $\mathcal{B}(D, A, C, O)$ , биће  $AC = OC - OA$ ,  $AD = OA - OD$  или  $AC = OA - OC$ ,  $AD = OD - OA$ . У оба случаја важи еквиваленција  $AC \cdot DB = AD \cdot CB$  и  $\mathcal{B}(C, A, D) \iff (OC - OA) \cdot (DO + OB) = (OA - OD) \cdot (CO + OB)$ . Заиста, у првом случају то је очигледно, а у другом случају множењем леве и десне стране последње једнакости са  $-1$  добијамо  $(OA - OC) \cdot (DO + OB) = (OD - OA) \cdot (CO + OB)$ , што онда даје  $AC \cdot DB = AD \cdot CB$ . Даље, користећи да је  $AO = OB$  добијамо

$$\begin{aligned} OC \cdot DO + OC \cdot OB - OA \cdot DO - OA \cdot OB &= \\ = OA \cdot CO + OA \cdot OB - OD \cdot CO - OD \cdot OB &= \\ OC \cdot OD + OC \cdot AO - AO \cdot OD - AO \cdot AO &= \\ = AO \cdot OC + AO \cdot AO - OD \cdot OC - OD \cdot AO &= \\ OC \cdot OD - AO^2 &= AO^2 - OC \cdot OD \\ 2AO^2 &= 2OC \cdot OD \\ AO^2 &= OC \cdot OD. \end{aligned}$$

Поново, како смо претпоставили да важи  $C, D \div O$ , имамо да важи  $OC \cdot OD = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$ , па на крају имамо и еквиваленцију са  $AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$ .

Према томе, важи  $\mathcal{H}(A, B; C, D) \iff AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}$ .

**II начин:** Овај начин је много краћи од I начина, али користе се неке ствари за које су потребна додатна образложења. Конкретно, користи се скаларни производ вектора који се учи на предмету Геометрија 1 и његове особине. Лако се проверава да израз дефинисан у дефиницији 18 суштински представља скаларни производ колинеарних вектора. Заиста, ако није  $\mathcal{B}(B, A, C)$ , онда је  $\cos \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos 0 = 1$ , па добијамо  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| = AB \cdot AC$ , а ако јесте  $\mathcal{B}(B, A, C)$ , онда је  $\cos \angle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cos \pi = -1$ , па је  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| = -AB \cdot AC$ . Међутим, у оквиру овог предмета не проучава се скаларни производ вектора (зато постоји дефиниција 18) и било би потребно много додатних објашњења да би се оправдала еквиваленција

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A, B; C, D) &\iff \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}} \\ &\iff \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}. \end{aligned}$$

Нпр. за почетак бисмо морали објаснити шта представља „множење”  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$  јер такав израз није дат дефиницијом 18, па затим како се од односа колинеарних вектора долази до њиховог „множења” итд. Овде то нећемо радити, јер овај начин служи да покаже су једине компликације до којих је дошло у I начину оне око распореда тачака. Кад су вектори у питању, распоред тачака нам не прави проблем. Даље имамо

$$\iff (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB}) = -(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}) \cdot (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB})$$

(овде бисмо морали оправдати дистрибутивност „множења” у односу на сабирање вектора)

$$\begin{aligned} \iff \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} &= \\ = -\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

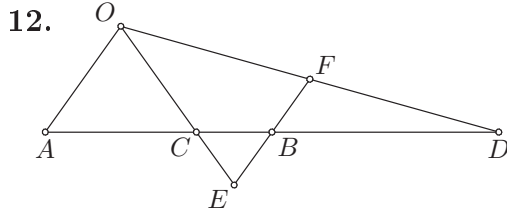
Сада искористимо да је  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$  и да за свако  $X, Y$  важи  $-\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{YX}$ .

$$\begin{aligned} \iff -\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} &= \\ = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

По дефиницији 18 је  $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XZ} = \overrightarrow{XZ} \cdot \overrightarrow{XY}$ . Заиста, ако није  $\mathcal{B}(Y, X, Z)$ , онда није ни  $\mathcal{B}(Z, X, Y)$ , па је  $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XZ} = XY \cdot XZ = XZ \cdot XY = \overrightarrow{XZ} \cdot \overrightarrow{XY}$ , ако јесте  $\mathcal{B}(Y, X, Z)$ , онда је и  $\mathcal{B}(Z, X, Y)$  и  $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XZ} = -XY \cdot XZ =$

$-XZ \cdot XY = \overrightarrow{XZ} \cdot \overrightarrow{XY}$ . Такође,  $\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XY} = XY \cdot XY = XY^2$  јер не важи  $\mathcal{B}(Y, X, Y)$ . Следи:

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow 2OB^2 = 2\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} \\ &\Longleftrightarrow OB^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} \\ &\Longleftrightarrow AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}. \end{aligned}$$



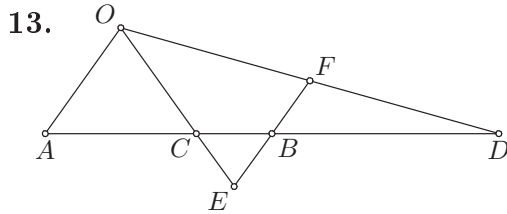
На основу Талесове теореме следи да је  $AC : CB = AO : EB$ , као и  $AD : DB = AO : BF$ , па је

$$AC : CB = AD : DB \Longleftrightarrow AO : EB = AO : BF \Longleftrightarrow EB = BF.$$

По претпоставци су  $A, B, C, D$  разне тачке праве  $p$ , па на основу разматрања пре дефиниције 16 следи да је  $AC : CB = AD : DB$  могуће само у случају да је  $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$ . Дакле,

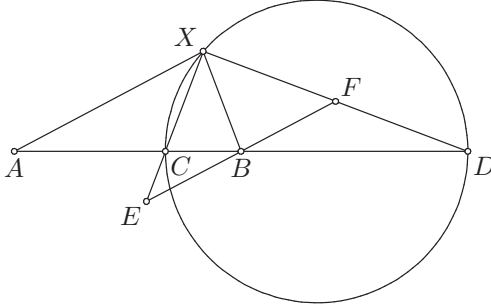
$$\mathcal{H}(A, B; C, D) \Longleftrightarrow AC : CB = AD : DB \Longleftrightarrow EB = BF.$$

Да би ово било еквивалентно са тиме да је  $B$  средиште дужи  $EF$ , треба само проверити да ли су тачке  $E, F$  различите. Ако би било  $E = F$ , онда би праве  $OC$  и  $OD$  биле исте, а како се тачка  $O$  налази ван праве  $p$  која садржи  $C, D$  следило би да је  $C = D$ , што је у супротности с условом задатка. Дакле,  $E \neq F$ , па је заиста  $EB = BF \Longleftrightarrow B$  је средиште  $EF$ . Према томе, доказали смо да важи  $\mathcal{H}(A, B; C, D) \Longleftrightarrow B$  је средиште  $EF$ .



Нека су  $m, n$  две дате неподударне дужи и нека су  $A, B$  две дате тачке. Нека је  $O$  произвољна тачка ван праве  $AB$  таква да је  $OA = m$ , нека је  $p$  права паралелна правој  $OA$  која садржи тачку  $B$ , нека су  $E, F$  тачке праве  $p$  с разних страна тачке  $B$  такве да је  $BE = BF = n$  и нека су  $C, D$  пресечне тачке правих  $OE, OF$  с правом  $AB$ . На основу Талесове теореме

среди да је  $AC : CD = AO : BE = m : n = AO : BF = AD : DB$ , па тачке  $C, D$  припадају траженом геометријском месту  $l$  тачака  $X$  таквих да је  $AX : XB = m : n$ . Докажимо да је тражено ГМТ  $l$  круг  $k$  над пречником  $CD$ .



$\square \supseteq$ : Нека је  $X \in k$  произвољна тачка круга  $k$ . Докажимо да је  $AX : XB = m : n$ . У том циљу посматрајмо праву паралелну правој  $AX$  кроз тачку  $B$  и означимо њен пресек са правима  $XC, XD$  редом са  $E, F$  (немају везе с претходним тачкама  $E, F$  које смо користили да бисмо нашли тачке  $C, D$ ). На основу Талесове теореме је  $AX : BE = AC : CB = m : n$  и  $AX : BF = AD : DB = m : n$ , па следи да је  $BE = BF$ , тј.  $B$  је средиште дужи  $EF$ . Троугао  $\triangle EXB$  је правоугли, јер је  $\angle EXB = \angle CXD = \frac{\pi}{2}$  као периферијски угао над пречником  $CD$ . Следи да је  $B$  средиште хипотенузе  $EF$ , па је уједно и центар описаног круга тог троугла, што значи да је  $BE = BF = BX$ , а како је  $AX : BE = m : n$ , следи да је  $AX : XB = m : n$ .

$\square \subseteq$ : Нека је  $X \in l$  произвољна тачка, тј. таква да је  $AX : XB = m : n$  и докажимо да је  $X \in k$ . Посматрајмо поново праву паралелну правој  $AX$  кроз тачку  $B$  и означимо њен пресек са правима  $XC, XD$  редом са  $E, F$ . На основу Талесове теореме је  $AX : BE = AC : CB = m : n$  и  $AX : BF = AD : DB = m : n$ , па због  $AX : XB = m : n$  следи да је  $BE = BF = BX$ , тј. да је  $B$  центар описаног круга троугла  $\triangle EXB$ . Према томе, тај троугао је правоугли, тј.  $\angle EXB = \frac{\pi}{2}$ . Пошто је  $\angle CXD = \angle EXB$ , следи да је то периферијски угао над пречником  $CD$ , тј. да  $X \in k$ .

**Дефиниција 19.** Круг  $k$  из претходног задатка зове се *Аполонијев круг*.

**Став 1.** Нека је  $k(O, r)$  круг равни  $\alpha$ ,  $P$  тачка те равни и  $A, B$  пресечне тачке круга  $k$  и произвољне праве која садржи тачку  $P$  и има заједничких тачака с кругом  $k$  (може бити и тангента, тада је  $A = B$ ). Вредност израза  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  не зависи од избора те праве.

**Доказ.** Разликујемо случајеве када је  $P$  тачка у спољашњости круга, на кругу или у његовој унутрашности. Нека је  $P$  у спољашњости круга и

нека је  $PT$  тангента на кругу  $k$ . Троуглови  $\triangle PTA$  и  $\triangle PBT$  су слични, јер је  $\angle TPA = \angle BPT$  и  $\angle PTA = \angle PBT$  (угао између тангенте и тетиве подударан је периферијском углу над том тетивом). Следи да је  $PT : PB = PA : PT$ , тј.  $PA \cdot PB = PT^2$ . Како је  $\triangle PTO$  правоугли, на основу Питагорине теореме је  $PT^2 = PO^2 - OT^2 = PO^2 - r^2$ . Такође, како је  $P$  у спољашњости круга  $k$ , следи да не важи  $\mathcal{B}(A, P, B)$ , па на основу дефиниције 18 важи  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PA \cdot PB = PO^2 - r^2$ .

Ако је  $P$  на кругу  $k$ , онда се увек једна од тачака  $A, B$  поклапа с тачком  $P$ , па је  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0 = PO^2 - r^2$  (јер је  $OP = r$ ).

Ако је  $P$  унутрашњости круга  $k$ , онда посматрајмо праву  $PO$  (ако се  $P$  и  $O$  поклапају, посматрајмо било коју праву која садржи тачку  $O$ ) и означимо њене пресеке с кругом  $k$  са  $C, D$  тако да важи  $\mathcal{B}(C, O, P, D)$ . Троуглови  $\triangle PAC$  и  $\triangle PDB$  су слични, јер је  $\angle PAC = \angle BAC = \angle BDC = \angle BDP$  и  $\angle PCA = \angle DCA = \angle DBA = \angle DBP$  (периферијски углови над истим луковима су подударни). Следи да је  $PA : PD = PC : PB$ , тј.  $PA \cdot PB = PC \cdot PD = (PO + OC) \cdot (OD - PO) = (r + PO) \cdot (r - PO) = r^2 - PO^2$ . Како је  $P$  тачка у унутрашњости круга  $k$ , следи да важи  $\mathcal{B}(A, P, B)$ , па на основу дефиниције 18 важи  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -PA \cdot PB = -(r^2 - PO^2) = PO^2 - r^2$ .

Према томе, у свим случајевима је  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = PO^2 - r^2$ , што значи да вредност тог израза не зависи од избора праве која садржи тачку  $P$ .  $\square$

**Дефиниција 20.** Вредност израза  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} (= PO^2 - r^2)$  назива се *пошеницијом* тачке  $P$  у односу на круг  $k(O, r)$  и пбечежава се са  $p(P, k)$ .

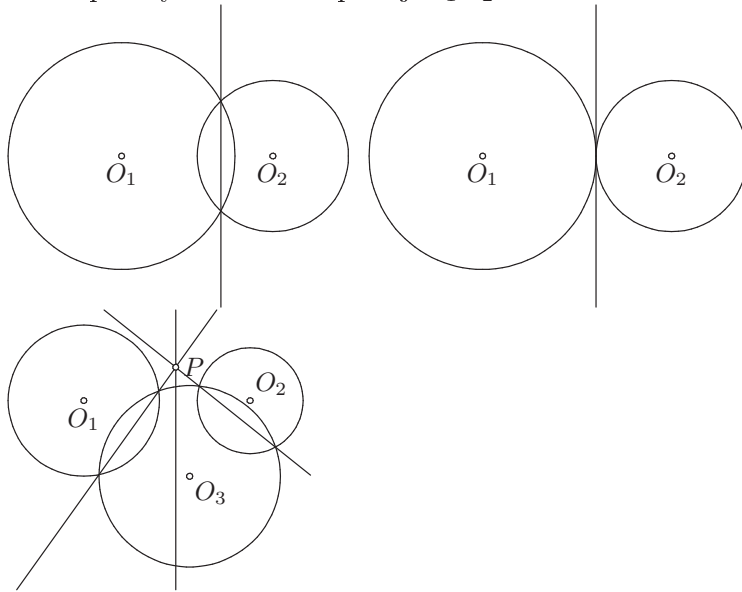
Из дефиниције је јасно да је потенција тачке  $P$  већа од нуле ако  $P$  припада спољашњости круга  $k$ , једнака нули ако припада кругу  $k$ , а мања од нуле ако припада унутрашњости круга  $k$ . Такође, најмању потенцију има тачка  $O$  и она је једнака  $-r^2$ .

**Став 2.** *Скупи свих тачака равни које имају једнаке пошениције у односу на кругове  $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$  је права управна на правој  $O_1O_2$ .*

**Дефиниција 21.** Права из претходног става назива се *пошеницијалном* или *радикалном осом* кругова  $k_1$  и  $k_2$ .

Ако имамо три круга у равни, њихове потенцијалне осе припадају једном прамену, а ако је у питању прамен конкурентних правих, пресечна тачка се назива *радикалним центром* тих кругова. Како конструисати радикалну осу кругова  $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$ ? Ако се они секу у тачкама  $A, B$ , потенција тих тачака у односу на оба круга је нула, па оне припадају њиховој радикалној оси. Следи да је радикална оса управо права

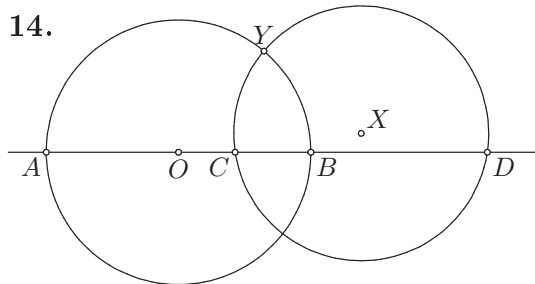
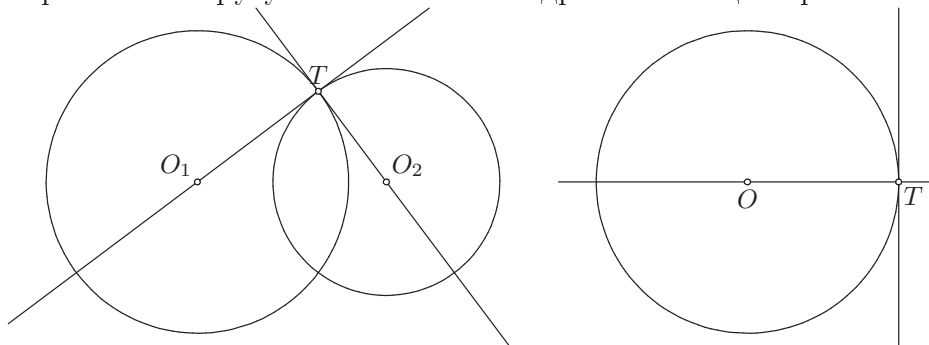
$AB$ . Ако се  $k_1, k_2$  додитују у тачки  $A$ , онда се она налази на правој  $O_1O_2$ , па је радикална оса кругова  $k_1, k_2$  права која је управна на  $O_1O_2$  у тачки  $A$ , што је заједничка тангента кругова  $k_1, k_2$  њиховој додирној тачки. Ако кругови  $k_1, k_2$  немају заједничких тачака, онда конструишемо круг  $k_3(O_3, r_3)$  такав да његов центар  $O_3$  не припада правој  $O_1O_2$  и да сече кругове  $k_1, k_2$ . Затим конструишемо радикалне осе кругова  $k_1, k_3$  и кругова  $k_2, k_3$ , и у њиховом пресеку налази се радикални центар кругова  $k_1, k_2, k_3$ . Та тачка припада радикалној оси кругова  $k_1, k_2$ , па конструишемо нормалу из ње на правој  $O_1O_2$ .



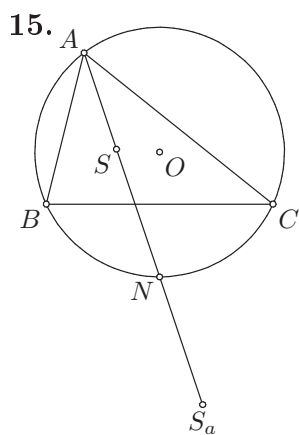
**Дефиниција 22.** Нека су  $k_1, k_2$  кругови неке равни који се секу и нека су  $t_1, t_2$  редом тангенте на тим круговима у некој од пресечних тачака. Угао између кругова  $k_1, k_2$  је угао који граде тангенте  $t_1, t_2$ . Ако је  $t_1 \perp t_2$ , за кругове  $k_1, k_2$  кажемо да су међусобно *нормални* (*управни*, *ортогонални*) и то означавамо са  $k_1 \perp k_2$ . Слично, угао између праве и круга неке равни који се секу јесте угао између те праве и тангенте круга у некој од пресечних тачака, а ако су оне међусобно нормалне, онда су и тај круг и та права међусобно *нормални*.

Размотримо кад су кругови, односно круг и права, међусобно нормални. Знамо да је тангента неког круга нормална на полупречнику који садржи додирну тачку. Пошто је код нормалних кругова  $k_1, k_2$  тангента  $t_1$  на  $k_1$  у некој од пресечних тачака нормална на тангенти  $t_2$  круга  $k_2$  у истој тачки и на полупречнику круга  $k_1$  који садржи ту тачку, следи да је тај полупречник садржан у тангенти  $t_2$ . Дакле, кругови  $k_1, k_2$  су међусобни нормални ако и само ако се секу и тангента на једном од њих

у некој од пресечних тачака садржи центар другог. Слично, права је нормална на кругу ако и само ако садржи његов центар.



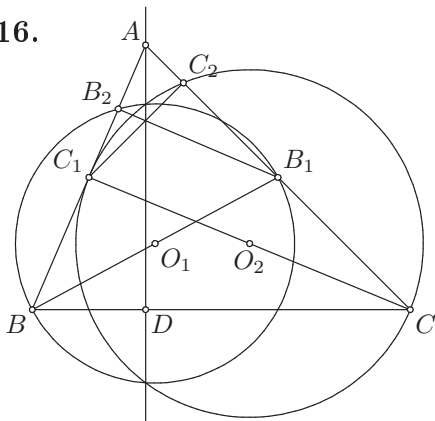
На основу 11. задатка закључујемо да важи  $\mathcal{H}(A, B; C, D)$  ако и само ако важи  $AO^2 = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = p(O, l)$ . Ово важи ако и само ако је полу-пречник  $AO$  круга  $k$  подударан тангентној дужи из тачке  $O$  на кругу  $l$ , што важи ако и само ако се кругови  $k$  и  $l$  секу и тангента на кругу  $l$  у некој од тих пресечних тачака садржи центар круга  $k$ . Ово последње важи ако и само ако је  $k \perp l$ .



Израчунајмо потенцију тачке  $S$  у односу на описани круг  $l$ . С једне стране она је једнака  $p(S, l) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SN} = -SA \cdot SN$ . На основу 2. задатка следи да је  $SA \cdot SN = 2r\rho$ . С друге стране,  $p(S, l) = SO^2 - r^2$ , па следи

да је  $SO^2 - r^2 = -2r\rho$ , одакле следи прва тражена једнакост. Слично,  $S_aO^2 - r^2 = p(S_a, l) = \overrightarrow{S_aA} \cdot \overrightarrow{S_aN} = S_aA \cdot S_aN$ , а на основу 2. задатка је  $S_aA \cdot S_aN = 2r\rho_a$ , па је  $S_aO^2 - r^2 = 2r\rho_a$ .

16.



Нека су  $O_1, O_2$  редом средишта тежишних дужи  $BB_1, CC_1$ . Довољно је доказати да је  $AD \perp O_1O_2$  и да тачка  $A$  има једнаке потенције у односу на кругове  $k_1(O_1, O_1B), k_2(O_2, O_2C)$ . Тачке  $B_1, C_1$  су редом средишта страница  $AC, CB$ , па је  $B_1C_1$  средња линија троугла  $\triangle ABC$ , што значи да је  $B_1C_1 \parallel BC$ . Према томе,  $BCC_1B_1$  је неконвексан трапез, па је  $O_1O_2$  његова средња линија, што значи да је  $O_1O_2 \parallel BC$ . С друге стране, важи  $AD \perp BC$ , па следи да је  $AD \perp O_1O_2$ .

Означимо са  $B_2$  другу пресечну тачку круга  $k_1$  и праве  $AB$  и са  $C_2$  другу пресечну тачку круга  $k_2$  и праве  $AC$ . Углови  $\angle BB_2B_1, \angle CC_2C_1$  су периферијски редом над пречницима  $BB_1, CC_1$ , па су прави. Следи да су и углови  $\angle AB_2B_1, \angle AC_2C_1$  прави. Дакле, троуглови  $\triangle AB_2B_1, \triangle AC_2C_1$  имају два пара подударних углова (углови код темена  $A$  се поклапају и  $\angle AB_2B_1 = \angle AC_2C_1 = 90^\circ$ ), па су слични. Према томе, добијамо да је  $AB_2 : AC_2 = AB_1 : AC_1$ . Тачке  $B_1, C_1$  су средишта страница  $AC, AB$ , тј. важи  $AB_1 = \frac{AC}{2}, AC_1 = \frac{AB}{2}$ , па је  $AB_1 : AC_1 = \frac{AC}{2} : \frac{AB}{2} = AC : AB$ , што значи да је  $AB_2 : AC_2 = AC : AB$ , тј.  $AB_2 \cdot AB = AC_2 \cdot AC$ . Међутим, ово није ништа друго него једнакост потенција тачке  $A$  у односу на кругове  $k_1, k_2$ , па следи да је  $AD$  њихова потенцијална оса.

### 3 Конструктивни задаци

Сада ћемо проучавати задатке у којима се тражи да лењиром и ше-старом конструишемо неку фигуру у равни тако да испуњава одређена својства. Напоменимо на овом месту да се сматра да лењир нема на себи ознаке за мерење дужине, тј. да само лењиром не можемо цртати дужи дате дужине, тј. које су подударне некој датој дужи.

Наведимо сада основне конструкције које можемо извршити лењиром и шестаром.

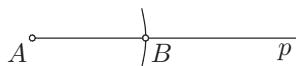
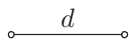
**Лењир:** Лењиром можемо конструисати праву која садржи две дате разне тачке, затим полуправу која садржи две дате разне тачке тако да једна од њих буде њено теме као и дуж чија су темена две дате разне тачке.

**Шестар:** Шестаром можемо конструисати круг чији је центар дата тачка и полупречник дата дуж. Такође, не морамо конструисати цео круг, већ можемо и било који лук тог круга.

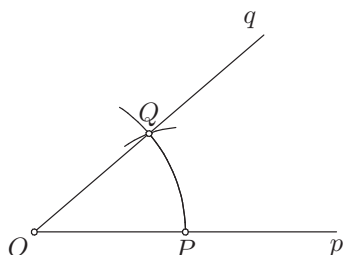
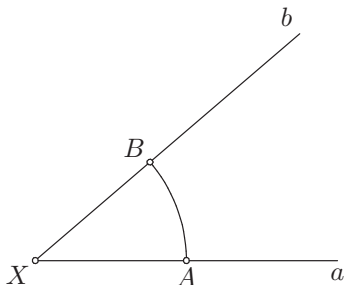
Овај списак је веома сиромашан, а постоје неке конструкције које су релативно једноставне, а користе се у сложенијим конструкцијама. Уколико бисмо сваку сложенију конструкцију морали да сводимо на основне, решења задатака би се непотребно компликовала, па зато проширујемо списак основних конструкција које ћемо сматрати тривијалним и нећемо их сводити на основне (зовемо их елементарним конструкцијама):

- конструкција дужи подударне датој дужи;
- конструкција угла подударног датом углу;
- конструкција медијатрисе дужи;
- конструкција средишта дужи;
- конструкција бисектрисе угла;
- конструкција правог угла и нормалних правих (полуправих, дужи);
- конструкција паралелних правих (полуправих, дужи);
- конструкција тангенте на датом кругу из дате дужи;
- конструкција геометријског места тачака (ГМТ) из којих се дата дуж види под датим углом;
- конструкција троугла коме су:
  - странице подударне датим дужима;
  - две странице и њима захваћени угао подударни датим дужима и датом углу;
  - једна страница и на њој налегли углови подударни датој дужи и датим угловима;
  - две странице и угао наспрам једне од њих подударни датим дужима и датом углу и познато је да је угао наспрам друге странице оштар, прав или туп;
  - једна страница, угао наспрам ње и један од углова налеглих на њој подударни датој дужи и датим угловима;
- подела дате дужи на  $n$  подударних дужи, где је  $n \in \mathbb{N}$  произвољни природни број.

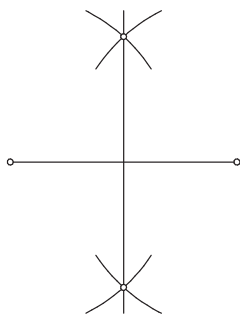
Сада ћемо детаљно изучити сваку од ових конструкција и надаље их нећемо више додатно објашњавати.



Означимо са  $A$  произвољну тачку и конструишимо произвољну полу-праву  $Ap$  чије је теме тачка  $A$ . Конструишимо кружни лук с центром у тачки  $A$  чији је полупречник дуж  $d$  (забодемо иглу шестара у једно теме дужи  $d$  и отворимо га тако да врх оловке буде на другом темену дужи  $d$ ). У пресеку тог лука и полуправе  $Ap$  означимо тачку  $B$  и дуж  $AB$  је подударна дужи  $d$ .

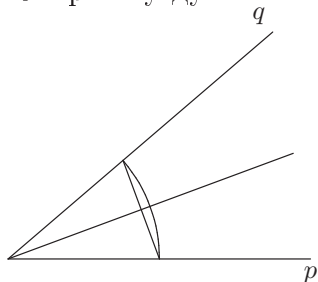


Означимо са  $O$  произвољну тачку и конструишимо произвољну полу-праву  $Op$  чије је теме тачка  $O$ . Конструишимо лук  $l$  с центром у тачки  $O$  произвољног полупречника и означимо са  $P$  пресечну тачку тог лука и полуправе  $Op$ . На датом углу  $\angle aXb$  конструишимо лук с центром у  $X$  полупречника  $OP$  од крака  $Xa$  до крака  $Xb$ . Пресечне тачке тог лука с крацима  $Xa, Xb$  означимо редом са  $A, B$ . Конструишимо сада лук с центром у  $P$  полупречника  $AB$  и у пресеку с луком  $l$  означимо тачку  $Q$ . Конструишимо полуправу  $Oq$  с теменом  $O$  која садржи тачку  $Q$  и угао  $\angle pOq$  је подударан углу  $\angle aXb$ .

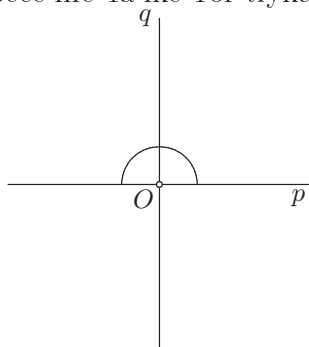


Медијатриса дужи конструише се тако што се конструишу два лука из једног и из другог темена дужи, при чему су полупречници тих лукова подударни и већи су од половине дате дужи да би имали две пресечне тачке. Конструишемо праву која пролази кроз пресечне тачке тих лукова и та права јесте медијатриса дате дужи.

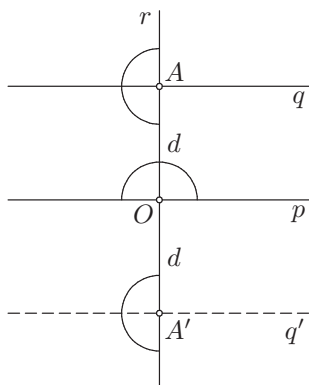
У пресеку дужи и њене медијатрисе налази се средиште те дужи.



Бисектриса угла конструише се тако што се конструише лук чији је центар у темену угла, произвољног полупречника, од једног до другог крака угла, а затим се конструише медијатриса дужи чији су крајеве пресечне тачке тог лука и кракова угла.

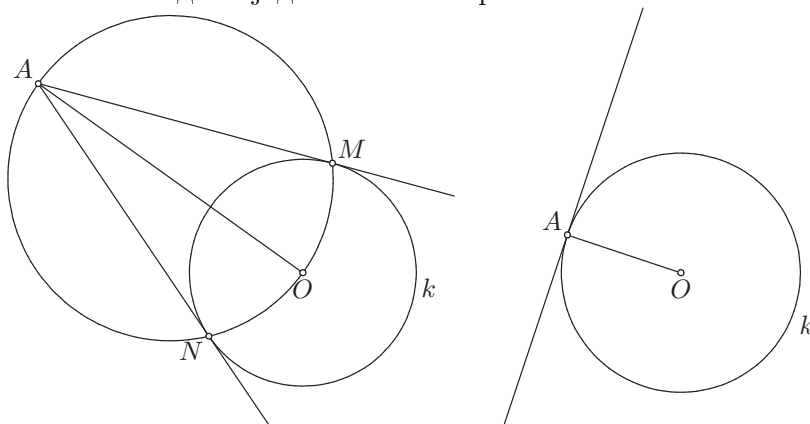


Нека је дата права  $p$  и на њој тачка  $O$ . Конструишимо симетралу  $q$  (праву, не полуправу!) опруженог угла чије је теме тачка  $O$ , а краци су му полуправе с теменом  $O$  које се налазе на правој  $p$ . Та симетрала је права која садржи тачку  $O$  и нормална је на правој  $p$ . Уколико желимо да конструишемо прав угао, права  $p$  и тачка  $O$  на њој су произвољне, а уместо симетрале (праве) конструишемо бисектрису (полуправу).



Нека је дата права  $p$ . Да бисмо конструисали праву  $q$  која је паралелна са  $p$ , конструирамо прво нормалу  $r$  на правој  $p$  у некој произвољној тачки  $O$ , а затим конструирамо нормалу  $q$  на правој  $r$ . Уколико желимо да права  $q$  буде на растојању  $d$  од праве  $p$  ( $d$  је дата дуж), конструирамо дуж  $OA$  која је подударна дужи  $d$  и конструирамо нормалу  $q$  на правој  $r$  у тачки  $A$ . Тада је  $q \parallel p$  и налази се на растојању  $d$  од ње.

Приметимо да постоје две могућности за тачку  $A$ , па постоје и две могућности за праву  $q$ . Уколико нам је потребно да се одлучимо за једну од њих, наметнемо додатни услов који жељена права  $q$  треба да задовољи и он ће нам дати јединствен избор.

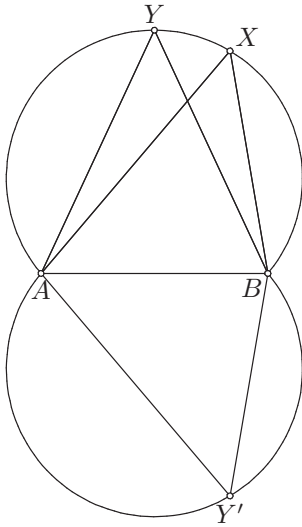


Ако је тачка  $A$  у спољашњости круга  $k$ , означимо с  $O$  центар круга  $k$  и конструирамо круг над пречником  $AO$  (центар му је средиште дужи  $AO$  и полупречник му је дуж чија су темена то средиште и тачка  $A$ ). У пресеку тог круга и круга  $k$  означимо тачке  $M, N$ . Праве  $AM, AN$  су тражене тангенте.

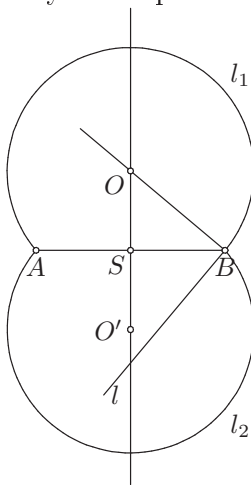
Ако је тачка  $A$  на кругу  $k$ , онда конструирамо нормалу на полупречнику  $OA$  у тачки  $A$ .

Пре него што видимо како се конструира ГМТ из којих се дата дуж  $AB$  види под датим углом  $\varphi$ , одредимо који је то скуп тачака (тј. ГМТ)

из којих се  $AB$  види под углом  $\varphi$ . Нека је  $X$  једна таква тачка. Тада је угао  $\angle AXB = \varphi$ . Посматрајмо описани круг троугла  $\triangle ABX$  и нека је  $Y$  произвољна тачка лука  $\widehat{AXB}$ . Угао  $\angle AYB$  је периферијски над луком  $\widehat{AB}$  (оним који не садржи тачке  $X, Y$ ), па је  $\angle AYB = \angle AXB = \varphi$ . Дакле, све тачке лука  $\widehat{AXB}$  припадају траженом ГМТ. Пресликајмо сада лук  $\widehat{AXB}$  симетрично у односу на праву  $AB$ . За све тачке  $Y'$  тог лука такође важи да се дуж  $AB$  види под углом  $\varphi$ , па оне припадају траженом ГМТ.



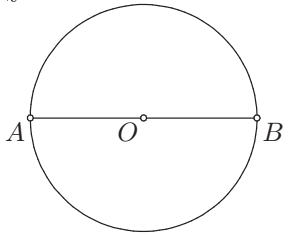
Обратно, ако је  $Z$  таква да важи  $Z, X \div AB$  и  $\angle AZB = \varphi = \angle AXB$ , онда је угао  $\angle AZB$  подударан периферијском углу над луком  $\widehat{AB}$  (оним који не садржи тачку  $X$ ), па припада луку  $\widehat{AXB}$ , а ако је  $Z$  таква да је  $Z, X \div AB$  и  $\angle AZB = \varphi$ , онда припада луку који је симетричан луку  $\widehat{AXB}$  у односу на праву  $AB$ . Дакле, тражено ГМТ јесте унија лука  $\widehat{AXB}$  и њему симетричног лука у односу на праву  $AB$ .



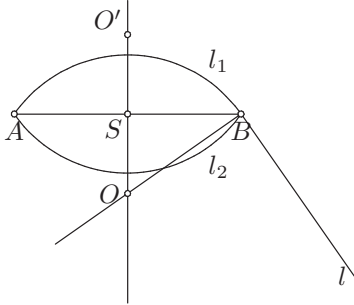
Нека је  $\varphi$  оштар угао, тј. нека је  $\varphi < \frac{\pi}{2}$ . Конструирамо полуправу  $Bl$  с теменом  $B$  такву да је  $\angle ABl = \varphi$  и конструирамо нормалу  $n$  на полуправој  $Bl$  у тачки  $B$ . Конструирамо симетралу дужи  $AB$  и нека је њен пресек с правом  $n$  тачка  $O$ . Конструирамо лук  $l_1$  с центром  $O$  од тачке  $A$  до тачке  $B$  такав да важи  $l_1, O \div AB$ . Нека је  $S$  средиште дужи  $AB$ . Конструирамо дуж  $SO'$  подударну дужи  $SO$  такву да важи  $O, O' \div S$  и конструирамо лук  $l_2$  с центром  $O'$  од тачке  $A$  до тачке  $B$  такав да важи  $l_2, O' \div AB$ .

Унија лукова  $l_1$  и  $l_2$  јесте тражено ГМТ, јер је полуправа  $Bl$  нормална на полупречнику  $OB$  круга који садржи лук  $l_1$ , па је она тангента и с тетивом  $AB$  заклапа угао  $\varphi$ . За произвољну тачку  $X$  с лука  $l_1$  угао  $\angle AXB$  периферијски над луком  $\widehat{AB}$  (који није лук  $l_1$ ) и подударан је углу између тетиве  $AB$  и тангенте  $Bl$ , односно углу  $\varphi$ , а онда због симетрије исто важи и за лук  $l_2$ .

Напоменимо да тачка  $O'$  није пресек полуправе  $Bl$  и медијатрисе дужи  $AB$ .



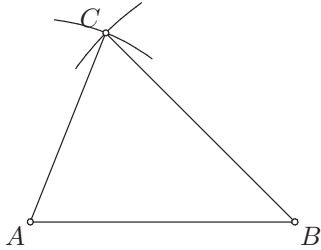
Нека је сада  $\varphi$  прав угао, тј.  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Конструирамо круг  $l$  над пречником  $AB$  и то је тражено ГМТ (за свако  $X \in l$  угао  $\angle AXB$  је периферијски над пречником  $AB$ , па је прав, тј. подударан је углу  $\varphi$ ).



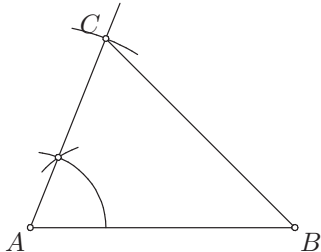
Коначно, ако је  $\varphi$  туп угао, тј.  $\varphi > \frac{\pi}{2}$ , конструкција иде слично као у првом случају (када је  $\varphi$  оштар), с тим што уместо услова  $l_1, O \div AB$  и  $l_2, O' \div AB$  имамо услове  $l_1, O \div AB$  и  $l_2, O' \div AB$ .

Сада ћемо проучити елементарне конструкције троугла. Приметимо да су увек дати они елементи троугла који се јављају у Ставовима о подударности троуглова. Разлог је што се Ставови користе да се докаже јединственост решења, односно да ако конструирамо два таква троугла

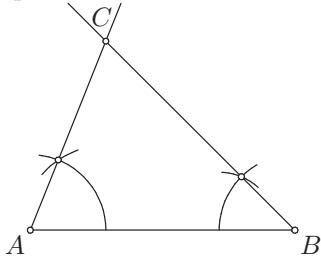
(којима су одговарајући елементи дате дужи, односно дати углови), они морају бити међусобно подударни.



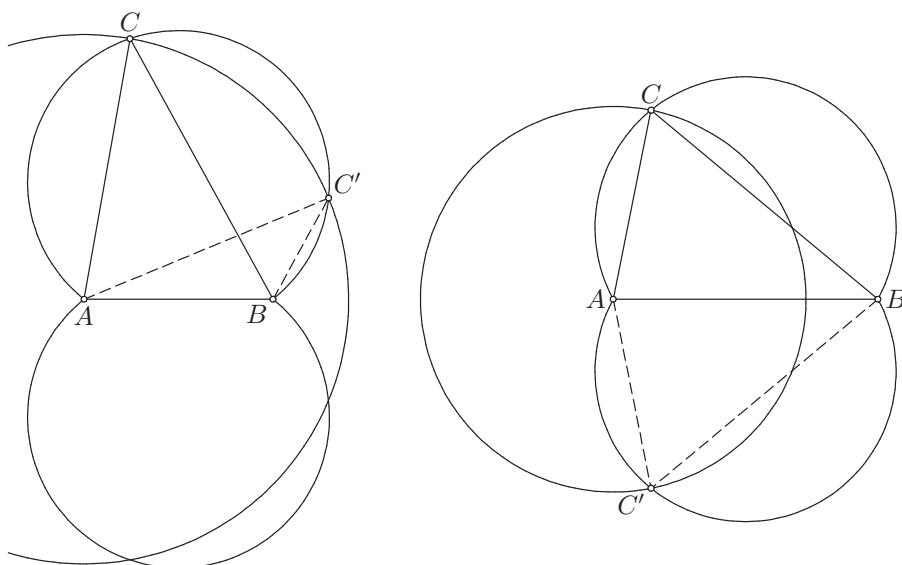
Нека су дате дужи  $a, b, c$ . Конструиримо дуж  $AB$  која је подударна дужи  $c$ . Конструиримо лук с центром  $A$  полупречника  $b$  и лук с центром  $B$  полупречника  $a$ . У пресеку тих лукова означимо тачку  $C$  и добили смо троугао  $\triangle ABC$ .



Нека су дати угао  $\alpha$  и дужи  $b, c$ . Конструиримо дуж  $AB$  која је подударна дужи  $c$ . Конструиримо полуправу  $Ar$  такву да је  $\angle BAr = \alpha$ . Конструиримо лук с центром  $A$  полупречника  $b$ , у пресеку с полуправом  $Ar$  означимо тачку  $C$  и добили смо троугао  $\triangle ABC$ .

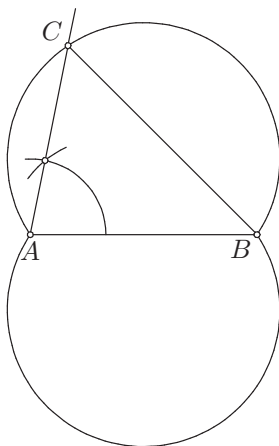


Нека су дати дуж  $c$  и углови  $\alpha, \beta$ . Конструиримо дуж  $AB$  која је подударна дужи  $c$ . Конструиримо полуправу  $Ar$  такву да је  $\angle BAr = \alpha$  и полуправу  $Bq$  која је с исте стране праве  $AB$  с које је и полуправа  $Ar$  и за коју важи  $\angle ABq = \beta$ . У пресеку тих полуправих означимо тачку  $C$  и добили смо троугао  $\triangle ABC$ .

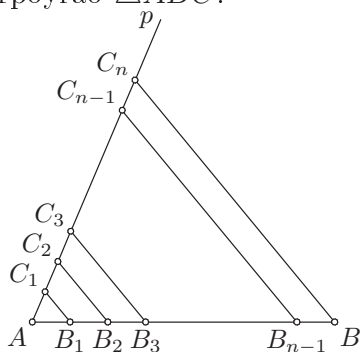


Нека су дати угао  $\gamma$  и дужи  $b, c$  и нека је познато да ли је угао  $\beta$  оштар, прав или туп. Конструиримо дуж  $AB$  која је подударна дужи  $c$ . Конструиримо ГМТ  $l$  из којих се дуж  $AB$  види под углом  $\gamma$ . Конструиримо круг  $k(A, b)$ . У пресеку круга  $k$  и ГМТ  $l$  означимо са  $C$  ону тачку за коју је угао  $\angle ABC$  оштар ако је  $\beta$  оштар, прав ако је  $\beta$  прав, односно туп ако је  $\beta$  туп. Тако добијамо троугао  $\triangle ABC$ .

Ако није познато да ли је угао  $\beta$  оштар, прав или туп, онда могу постојати два неподударна троугла  $\triangle ABC$  таквих да је  $AB = c$ ,  $\angle BAC = \alpha$  и  $AC = b$ . Ако је  $AC \leq AB$ , добијена решења биће међусобно подударна (тада се каже да је решење јединствено до на подударност). Ако је  $AC > AB$ , број међусобно неподударних решења биће једнак броју пресечних тачака круга  $k(A, b)$  и једног од лукова ГМТ  $l$  (дакле, постојаће два неподударна решења ако се они секу у двама разним тачкама, постојаће јединствено решење до на подударност ако се они додирују, тј. секу у једној тачки, а неће бити решења ако они немају пресечних тачака).



Нека су дати дуж  $s$  и углови  $\alpha, \gamma$ . Конструиримо дуж  $AB$  која је подударна дужи  $s$ . Конструиримо ГМТ  $l$  из којих се дуж  $AB$  види под углом  $\gamma$ . Конструиримо полуправу  $Ap$  такву да је  $\angle BAp = \alpha$ . У њеном пресеку са ГМТ  $l$  означимо са  $C$  тачку која није тачка  $A$  и добијамо троугао  $\triangle ABC$ .



Нека је  $AB$  дата дуж. Конструиримо произвољну полуправу  $Ap$  различиту од полуправе  $AB$  такву да угао  $\angle BAp$  није опружен. Нека је  $C_1$  произвољна тачка на полуправој  $Ap$  различита од тачке  $A$  и нека су  $C_2, C_3, \dots, C_n$  тачке на полуправој  $Ap$  такве да је  $\mathcal{B}(A, C_1, C_2, \dots, C_n)$  и  $AC_1 \cong C_1C_2 \cong C_2C_3 \cong \dots \cong C_{n-1}C_n$ . Конструиримо праву  $C_nB$  и затим конструиримо праве које садрже редом тачке  $C_{n-1}, \dots, C_2, C_1$  које су паралелне са правом  $C_nB$ . Њихове пресеке са дужи  $AB$  означимо редом са  $B_{n-1}, \dots, B_2, B_1$ . Тада су на основу Талесове теореме (и њених последица) дужи  $AB_1, B_1B_2, \dots, B_{n-1}B$  међусобно подударне.

Постоји још елементарних конструкција. Неке од њих ћемо навести у решењима задатака. Сада ћемо изучити етапе у решавању задатака из конструкција. Те етапе су Анализа, Конструкција, Доказ и Дискусија.

Анализа је етапа конструктивног задатка у којој се претпостави да имамо решен задатак, тј. да имамо конструисану фигуру која испуњава

услове задатка  $P$ . Затим тражимо нове услове  $Q$  које та фигура задовољава помоћу којих се она може лакше конструисати. Услове  $Q$  изводимо из услова  $P$ , па дакле доказујемо и  $P \Rightarrow Q$ .

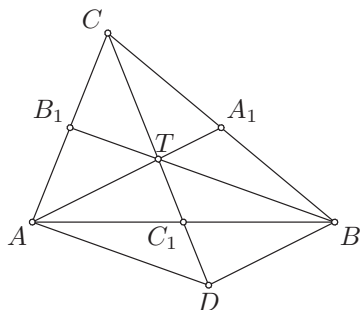
Конструкција је етапа у којој применом коначно много основних и елементарних конструкција описујемо како треба конструисати фигуру која задовољава услове  $Q$  које смо извели из задатих услова  $P$  током Анализе.

С обзиром на то да је наш задатак био да конструишемо фигуру која задовољава услове  $P$ , а ми смо у етапи Конструкција конструисали фигуру која задовољава услове  $Q$ , сада морамо доказати да тако конструисана фигура заиста задовољава почетне услове задатка, тј. услове  $P$ . Према томе, у етапи Доказ доказујемо  $Q \Rightarrow P$ . Све што смо навели у етапи Конструкција сматрамо да важи „по конструкцији” (ПК).

Коначно, у етапи Дискусија испитујемо колико постоји фигура које задовољавају услове задатка у зависности од њих.

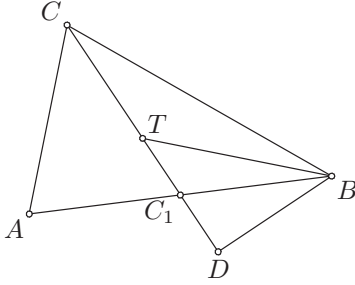
### 1. 1) $t_a, t_b, t_c$

**Анализа.** Нека је  $\triangle ABC$  троугао који задовољава услове задатка. Нека су  $A_1, B_1, C_1$  редом средишта страница  $BC, CA, AB$ . Тада су тежишне дужи  $AA_1, BB_1, CC_1$  редом подударне датим дужима  $t_a, t_b, t_c$ .



Нека је  $T$  пресек тежишних дужи  $AA_1, BB_1, CC_1$ , тј. тежиште троугла  $\triangle ABC$  и нека је тачка  $D$  симетрична тачки  $T$  у односу на тачку  $C_1$ . Тачка  $C_1$  је заједничко средиште дужи  $TD$  и  $AB$ , па је четвороугао  $ADBT$  паралелограм. Следи да је  $AD \parallel BT$  и  $AD = BT = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}t_b$ , као и  $BD \parallel AT$  и  $BD = AT = \frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}t_a$ . Такође, имамо да важи  $TD = TC_1 + C_1D = 2TC_1 = 2 \cdot \frac{1}{3}CC_1 = \frac{2}{3}t_c$ . У троуглу  $\triangle TDB$  имамо да је  $TD = \frac{2}{3}t_c$ ,  $DB = \frac{2}{3}t_a$  и  $BT = \frac{2}{3}t_b$ , па тај троугао унемо да конструишемо. Тачка  $C_1$  је средиште дужи  $TD$  и  $AB$ , па је тачка  $A$  симетрична тачки  $B$  у односу на тачку  $C_1$ . Такође, како је  $CT = \frac{2}{3}CC_1 = \frac{2}{3}t_c = TD$ , следи да је тачка  $T$  средиште дужи  $CD$ , као и да је тачка  $C$  симетрична тачки  $D$  у односу на тачку  $T$ .

**Конструкција.** Конструирамо троугао  $\triangle TDB$  такав да је  $TD = \frac{2}{3}t_c$ ,  $DB = \frac{2}{3}t_a$ ,  $BT = \frac{2}{3}t_b$ . Означимо са  $C_1$  средиште дужи  $TD$ , са  $A$  тачку симетричну тачки  $B$  у односу на тачку  $C_1$  и са  $C$  тачку симетричну тачки  $D$  у односу на тачку  $T$ .



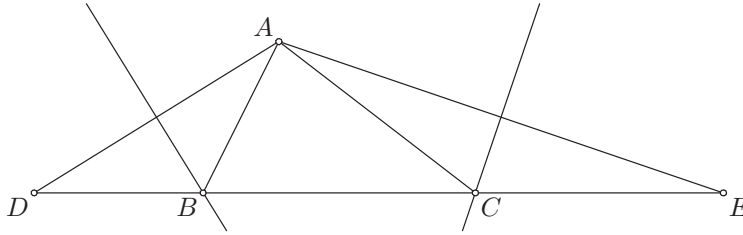
**Доказ.** Докажимо да овако конструисани троугао  $\triangle ABC$  задовољава услове задатка. По конструкцији је  $C_1$  средиште дужи  $AB$ . Означимо са  $A_1, B_1$  редом средишта страница  $BC, CA$ . Треба доказати да су тежишне дужи  $AA_1, BB_1, CC_1$  редом подударне дужима  $t_a, t_b, t_c$ . ПК је  $C_1$  средиште дужи  $TD$ , па је  $\mathcal{B}(T, C_1, D)$  и  $TC_1 = C_1D$ , а  $T$  је ПК средиште дужи  $CD$ , па следи  $\mathcal{B}(C, T, D)$  и  $CT = TD = TC_1 + C_1D = 2TC_1$ . Дакле, важи распоред  $\mathcal{B}(C, T, C_1, D)$  и  $CT : TC_1 = 2TC_1 : TC_1 = 2 : 1$ , па је  $T$  тежиште троугла  $\triangle ABC$ . Следи да је  $AT = \frac{2}{3}AA_1$ ,  $BT = \frac{2}{3}BB_1$  и  $CT = \frac{2}{3}CC_1$ . ПК је  $BT = \frac{2}{3}t_b$  и  $CT = TD = \frac{2}{3}t_c$ , па следи да је  $\frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}t_b$  и  $\frac{2}{3}CC_1 = \frac{2}{3}t_c$ . Дакле, важи  $BB_1 = t_b$  и  $CC_1 = t_c$ . Остаје још да докажемо да је  $AA_1 = t_a$ . Како је ПК  $C_1$  заједничко средиште дужи  $AB$  и  $TD$ , следи да је четвороугао  $ADBT$  паралелограм, па је  $AT = BD$ . ПК је  $BD = \frac{2}{3}t_a$ , а како је  $AT = \frac{2}{3}t_a$ , следи да је  $\frac{2}{3}AA_1 = \frac{2}{3}t_a$ , тј.  $AA_1 = t_a$ .

**Дискусија.** Ако је  $\frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b \leq t_c$  или  $\frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c \leq t_a$  или  $\frac{2}{3}t_c + \frac{2}{3}t_a \leq t_b$ , односно  $t_a + t_b \leq t_c$  или  $t_b + t_c \leq t_a$  или  $t_c + t_a \leq t_b$ , онда не постоји троугао  $\triangle TDB$ , па самим тим не постоји ни троугао  $\triangle ABC$ . Дакле, у овом случају нема решења.

Ако је  $t_a + t_b > t_c$ ,  $t_b + t_c > t_a$  и  $t_c + t_a > t_b$ , онда је троугао  $\triangle TDB$  одређен јединствено до на подударност (каква год два различита троугла  $\triangle TDB$  конструисали, они ће бити подударни на основу става ССС). Како троугао  $\triangle TDB$  једнозначно одређује троугао  $\triangle ABC$  (и обратно), следи да је и троугао  $\triangle ABC$  одређен јединствено до на подударност. Према томе, у овом случају постоји јединствено решење до на подударност.

## 2) $\beta, \gamma, p$

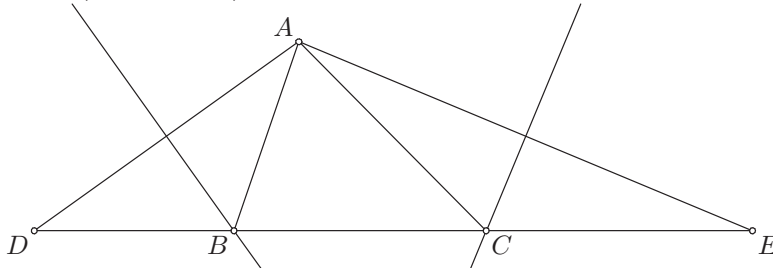
**Анализа.** Нека је  $\triangle ABC$  троугао који испуњава услове задатка, тј. такав да је  $\frac{BC+CA+AB}{2} = p$ ,  $\angle ABC = \beta$  и  $\angle BCA = \gamma$ .



Нека су  $D, E$  тачке на правој  $BC$  такве да је  $\mathcal{B}(D, B, C, E)$ ,  $DB = AB$  и  $CE = AC$ . Тада је  $DE = AB + BC + CA = 2p$ . Троугао  $\triangle ABD$  је једнакокраки, јер је  $AB = DB$ , па следи да је  $\angle ADB = \angle DAB = \varphi$ . Угао  $\angle ABC$  је спољашњи угао тог троугла, па је он једнак збиру унутрашњих несуседних углова  $\angle ADB$  и  $\angle DAB$ . Дакле,  $\beta = \varphi + \varphi = 2\varphi$ , па следи да је  $\varphi = \frac{\beta}{2}$ . Дакле,  $\angle ADB = \frac{\beta}{2}$ . Слично се доказује да је  $\angle AEC = \frac{\gamma}{2}$ .

У троуглу  $\triangle ADE$  важи да је  $DE = 2p$ ,  $\angle ADE = \angle ADB = \frac{\beta}{2}$  и  $\angle AED = \angle AEC = \frac{\gamma}{2}$ , па тај троугао унемо да конструишемо. Како је  $DB = AB$ , следи да тачка  $B$  припада медијатриси дужи  $DA$ . Слично, из  $CE = AC$  следи да тачка  $C$  припада медијатриси дужи  $AE$ .

**Конструкција.** Конструишемо троугао  $\triangle ADE$  такав да је  $DE = 2p$ ,  $\angle ADE = \frac{\beta}{2}$ ,  $\angle AED = \frac{\gamma}{2}$ . Конструишемо медијатрисе дужи  $AD$  и  $AE$  и означимо редом њихове пресеке с дужи  $DE$  са  $B, C$  тако да важи распоред  $\mathcal{B}(D, B, C, E)$ .

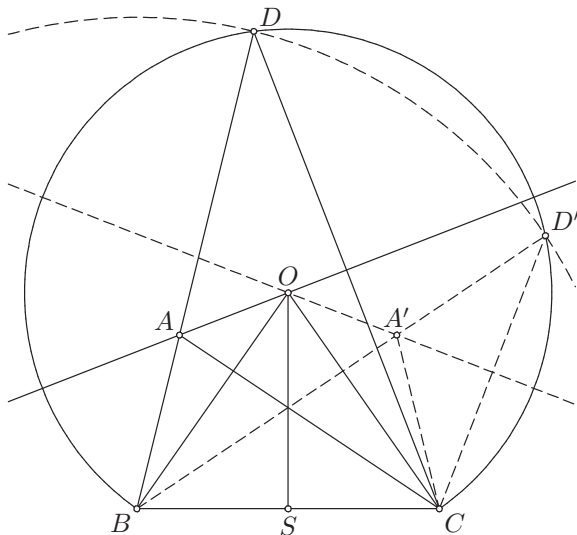


**Доказ.** Треба доказати да је  $\frac{AB+BC+AC}{2} = p$ , да је  $\angle ABC = \beta$  и да је  $\angle BCA = \gamma$ . ПК је  $\mathcal{B}(D, B, C, E)$ , па је  $DE = DB + BC + CE$ . Тачка  $B$  припада медијатриси дужи  $AD$ , па је  $DB = AB$ , а тачка  $C$  припада медијатриси дужи  $AE$ , па је  $EC = AC$ . Следи да је  $DE = AB + BC + AC$ . Такође, ПК је  $DE = 2p$ , па следи да је  $AB + BC + AC = 2p$ , односно да је  $\frac{AB+BC+AC}{2} = p$ .

Из  $DB = AB$  следи да је троугао  $\triangle ADB$  једнакокрак, па имамо да је  $\angle DAB = \angle ADB$ . ПК важи да је  $\mathcal{B}(D, B, C, E)$  и  $\angle ADE = \frac{\beta}{2}$ , па је  $\angle ADB = \angle ADE = \frac{\beta}{2}$ . Угао  $\angle ABC$  је спољашњи угао троугла  $\triangle ADB$ , па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова  $\angle DAB$  и  $\angle ADB$ . Дакле,  $\angle ABC = \angle DAB + \angle ADB = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta$ . Слично се доказује и да је  $\angle BCA = \gamma$ .



### Конструкција.



**Доказ.** Треба доказати да је  $\angle BAC = \alpha$ ,  $BC = a$  и  $AC + AB = b + c$ . ПК је  $BC = a$ . Тачка  $A$  припада страници  $BD$ , па важи  $\mathcal{B}(B, A, D)$  и  $BD = BA + AD$ . С друге стране, тачка  $A$  припада медијатриси странице  $CD$ , па је  $AD = AC$ . Дакле,  $BD = BA + AC$ , а како је ПК  $BD = b + c$ , следи да је  $BA + AC = b + c$ . Троугао  $\triangle ACD$  је једнакокрак, па је  $\angle ACD = \angle ADC$ . Како је ПК  $\mathcal{B}(B, A, D)$  и  $\angle BDC = \frac{\alpha}{2}$ , следи да је  $\angle ADC = \angle BDC = \frac{\alpha}{2}$ . Угао  $\angle BAC$  је спољашњи угао троугла  $\triangle ACD$ , па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова  $\angle ACD$  и  $\angle ADC$ . Следи да је  $\angle BAC = \angle ACD + \angle ADC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$ .

Ako je  $b + c \leq a$ , ne postoji trougao  $\triangle ABC$  kome je  $b + c$  zbir dveju strana a  $a$  treća strana (zbog nejednakosti trougla), pa zadatak nema rešenja.

84

$k$  мањи од пречника лука  $l$  или су они једнаки. Означимо са  $O$  центар лука  $l$  и са  $S$  средиште дужи  $BC$ . Угао  $\angle BOC$  је централни над тетивом  $BC$ , па је двоструко већи од било ког периферијског над том тетивом, а како се из сваке тачке лука  $l$  дуж  $BC$  види под углом  $\frac{\alpha}{2}$ , следи да је тај периферијски угао једнак  $\frac{\alpha}{2}$ , па је  $\angle BOC = \alpha$ . Важи  $OB = OC$  (полупречници лука  $l$ ), па је троугао  $\triangle BCO$  једнакокрак. Следи да је  $OS \perp BC$  и  $OS$  је бисектриса угла  $\angle BOC$ . Дакле,  $\angle BOS = \frac{\alpha}{2}$  и  $\sin \angle BOS = \frac{BS}{BO}$ , па је  $BO = \frac{BS}{\sin \angle BOS} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ . Према томе пречник лука  $l$  је  $2BO = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ , па се круг  $k$  и лук  $l$  секу ако и само ако је  $b + c \leq \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ .

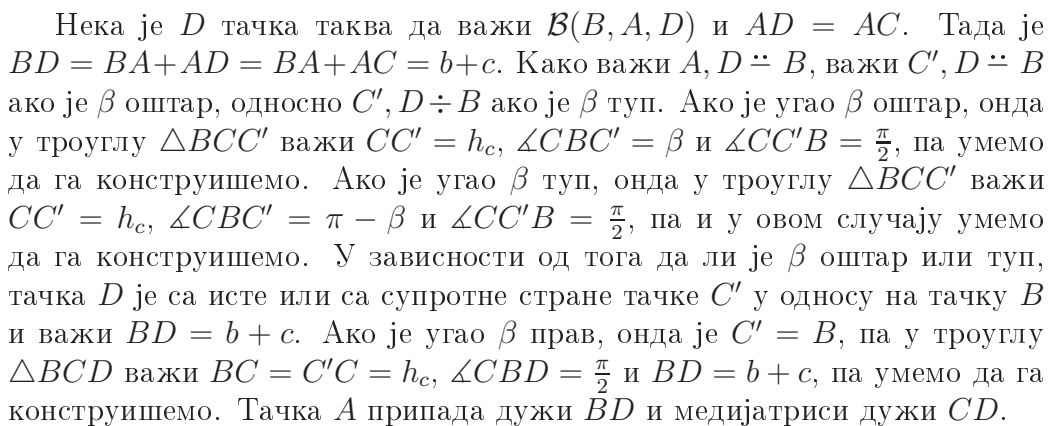
Ако је  $b + c = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ , онда се круг  $k$  и лук  $l$  додирују у тачки  $D$ , па постоји јединствен троугао  $\triangle BCD$  до на подударност. Штавише, како је тада  $BD$  пречник лука  $l$ , следи да је  $\angle BCD = \frac{\pi}{2}$  (периферијски над пречником  $BD$ ). Такође, тада медијатриса катете  $CD$  сече хипотенузу  $BD$ , па постоји и троугао  $\triangle ABC$  и јединствен је до на подударност.

Ако је  $b + c < \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ , онда се због услова  $b + c > a$  круг  $k$  и лук  $l$  секу у двама тачкама (од свих тетива лука  $l$  чије је једно теме тачка  $B$ , тетива  $BC$  је најкраћа, па ће обе пресечне тачке круга  $k$  и круга  $m(O, OB)$  који садржи лук  $l$  бити на луку  $l$ ), па постоје два неподударна троугла  $\triangle BCD$ . Треба још проверити да ли у оба случаја медијатриса странице  $CD$  сече страницу  $BD$ , тј. да ли постоји тачка  $A$ . С обзиром на то да је угао  $\angle BDC = \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$ , медијатриса дужи  $CD$  сигурно сече полуправу  $DB$  у некој тачки  $X$  (права нормална на једном краку оштрог угла сече други крак). Троугао  $\triangle CDX$  је једнакокраки ( $XC = XD$ ), па је  $\angle XCD = \angle XDC = \angle BDC$ . Тачка  $X$  припада дужи  $BD$  ако и само ако је  $\angle DCX < \angle DCB$ , односно ако и само ако је  $\angle BDC < \angle DCB$ . Ово важи ако и само ако је  $BC < DB$ , тј.  $a < b + c$ , а ово смо претпоставили да важи. Дакле, за сваки од неподударних троуглова  $\triangle BCD$  постоји тачка  $A$ , па постоје два неподударна троугла  $\triangle ABC$ .

Дакле, ако је  $\alpha < \pi$ ,  $b + c > a$  и  $\frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} > b + c$ , постоје два неподударна решења. Ако је  $\alpha < \pi$ ,  $b + c > a$  и  $\frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} = b + c$ , постоји јединствено решење до на подударност. Ако је  $\alpha \geq \pi$ ,  $b + c \leq a$  или  $\frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} \leq b + c$ , нема решења.

**Напомена 9.** Као што се може приметити, у Дискусији су коришћене тригонометријске функције. Дискусија у задацима из конструија је једино место где сме да се користи тригонометрија, јер нам једино тригонометријске функције дају везу између дужи и углова која нам је потребна да бисмо одредили постојање и број неподударних решења. Дакле, у Анализи, Конструкцији и Доказу, као и у било ком задатку који није из конструија, тригонометрија **не сме** да се користи.

4) a)  $\beta, h_c, b + c$



Ако је  $\beta$  прав, конструишимо троугао  $\triangle BCD$  такав да је  $BC = h_c$ ,  $\angle CBD = \frac{\pi}{2}$  и  $BD = b + c$ . Тачку  $B$  означимо још и са  $C'$ .

У пресеку дужи  $BD$  и медијатрисе дужи  $CD$  означимо тачку  $A$ , без обзира на то да ли је  $\beta$  оштар, прав или туп.

87

Ако је  $\beta$  оштар, онда важи  $C', D \div B$ , па важи и  $A, C' \div B$ . ПК је  $\angle C'BC = \beta$ , па следи да је  $\angle ABC = \angle C'BC = \beta$ .

Ако је  $\beta$  прав, онда је  $\angle ABC = \angle DBC$ , што је ПК прав угао, односно подударан је углу  $\beta$ . Дакле,  $\angle ABC = \beta$ .

Ако је  $\beta$  туп, онда важи  $C', D \div B$ , па важи и  $A, C' \div B$ . ПК је  $\angle C'BC = \pi - \beta$ , па следи да је  $\angle ABC = \pi - \angle C'BC = \pi - (\pi - \beta) = \beta$ .

Ако  $\beta$  није прав, онда је  $C' \neq B$ . ПК је  $CC' \perp C'B$ , а тачке  $A, C', B$  су колинеарне, па је  $CC' \perp AB$ , што значи да је  $CC'$  висина из темена  $C$ . ПК је  $CC' = h_c$ , па смо доказали да је висина из темена  $C$  подударна дужи  $h_c$ . Ако је  $\beta$  прав, онда је  $C' = B$ , па су праве  $CC'$  и  $CB$  истоветне. ПК је  $CB \perp BD$  и тачке  $A, B, D$  су колинеарне, па следи да је  $CC' \perp AB$ , а због  $C' = B$  следи да  $C'$  припада правој  $AB$ , па је и у овом случају  $CC'$  висина из темена  $C$ . ПК је  $CC' = CB = h_c$ , па је и у овом случају висина из темена  $C$  подударна дужи  $h_c$ .

Тачка  $A$  припада дужи  $BD$ , па је  $BD = BA + AD$ . Такође, тачка  $A$  припада медијатриси дужи  $CD$ , па следи  $AD = AC$  и  $BD = BA + AC$ . ПК је  $BD = b + c$ , па смо доказали да је  $BA + AC = b + c$ .

**Дискусија.** Ако је  $\beta \geq \pi$ , не постоји троугао  $\triangle ABC$  коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

Ако је  $\beta$  оштар, троугао  $\triangle BCC'$  постоји и јединствен је до на подударност. Такође, дуж  $BD$  је једнозначно одређена условима  $C', D \div B$  и  $BD = b + c$ , па и троугао  $\triangle BCD$  постоји и јединствен до на подударност.

Ако је  $\beta$  прав, троугао  $\triangle BCD$  постоји и јединствен је до на подударност.

Коначно, ако је  $\beta$  туп, троугао  $\triangle BCC'$  постоји и јединствен је до на подударност. Условима  $C', D \div B$  и  $BD = b + c$  је дуж  $BD$  једнозначно одређена, па и троугао  $\triangle BCD$  постоји и јединствен је до на подударност.

Одавде следи да ако постоји тачка  $A$  у пресеку дужи  $BD$  и медијатрисе дужи  $CD$ , постоји јединствено решење до на подударност. У претходном задатку смо видели да тачка  $A$  постоји ако и само ако је  $\angle BDC < \angle BCD$ , тј.  $BC < BD$ . Ако је  $\beta$  оштар, онда је  $\sin \beta = \frac{CC'}{BC}$ , тј.  $BC = \frac{h_c}{\sin \beta}$ , ако је  $\beta$  прав, онда је  $BC = C'C = h_c = \frac{h_c}{\sin \beta}$ , а ако је  $\beta$  туп, онда је  $\sin(\pi - \beta) = \frac{CC'}{BC}$ , па је  $BC = \frac{CC'}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{h_c}{\sin \beta}$ . Према томе, тачка  $A$  постоји ако и само ако је  $\frac{h_c}{\sin \beta} < b + c$ .

Дакле, ако је  $\beta < \pi$  и  $\frac{h_c}{\sin \beta} \geq b + c$ , нема решења, а ако је  $\beta < \pi$  и  $\frac{h_c}{\sin \beta} < b + c$ , постоји јединствено решење до на подударност.

б)  $\beta, h_c, b - c$

**Анализа.** Нека је  $\triangle ABC$  троугао који испуњава услове задатка. Нека је  $C'$  подножје висине из темена  $C$ . Тада је  $\angle ABC = \beta$ ,  $CC' = h_c$  и



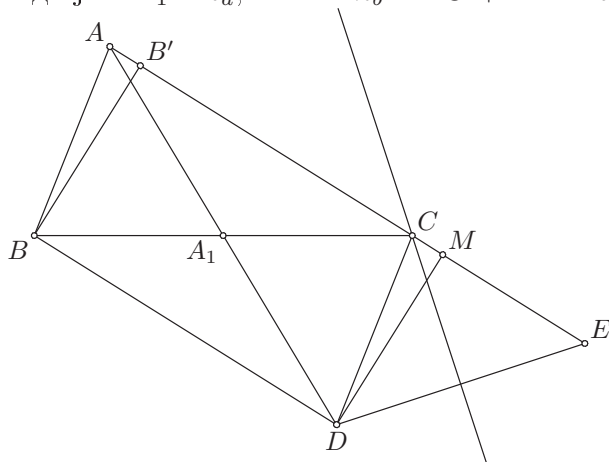


да је  $\angle YBN = \angle BCN = \angle NBC$ . Услов да важи распоред  $\mathcal{B}(A, B, N')$  је да је угао  $\angle N'BN$  већи од угла  $\angle YBN$ , тј. од њему подударног угла  $\angle NBC$ . Како је  $\cos$  опадајућа функција на  $(0, \frac{\pi}{2})$  (и на  $(0, \pi)$ , али овде је примењујемо на оштре углове), овај услов је еквивалентан са условом  $\cos \angle N'BN < \cos \angle NBC$ , тј.  $\frac{BN'}{BN} < \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}BN}$ , односно  $BN' < \frac{1}{2}BC$ . Дакле, услов је  $\frac{1}{2}(b-c) < \frac{1}{2}\frac{h_c}{\sin \beta}$ , тј.  $(b-c) \sin \beta < h_c$ .

Према томе, ако је  $\beta \leq \frac{\pi}{2}$  и  $(b-c) \sin \beta < h_c$ , задатак има јединствено решење до на подударност. Такође, ако је  $\beta > \frac{\pi}{2}$  и  $(b-c) \sin \beta < h_c < (b-c) \operatorname{tg}(\pi - \beta)$ , задатак има јединствено решење до на подударност. У свим осталим случајевима задатак нема решења.

5) а)  $t_a, h_b, b+c$

**Анализа.** Нека је  $\triangle ABC$  троугао који испуњава услове задатка. Нека је  $A_1$  средиште странице  $BC$  и нека је  $B'$  подножје висине из темена  $B$ . Тада је  $AA_1 = t_a$ ,  $BB' = h_b$  и  $AC + AB = b + c$ .

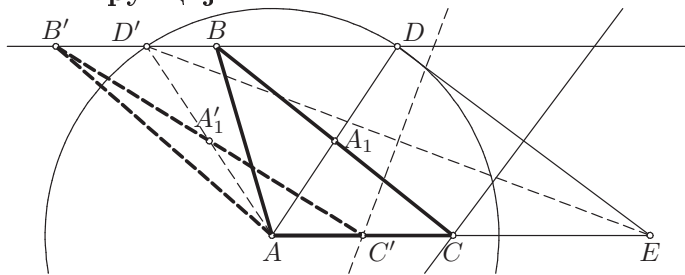


Нека је  $D$  тачка симетрична тачки  $A$  у односу на тачку  $A_1$ . Тада је  $AD = AA_1 + A_1D = 2AA_1 = 2t_a$ . У четвороуглу  $ABDC$  дијагонале  $AD$  и  $BC$  имају заједничко средиште  $A_1$ , па је то паралелограм. Следи да је  $BD \parallel AC$  и  $BD = AC$ , као и  $AB \parallel CD$  и  $AB = CD$ . Нека је  $M$  подножје нормале из тачке  $D$  на правој  $AC$  и нека је  $E$  тачка таква да је  $\mathcal{B}(A, C, E)$  и  $CE = CD$ . Тада је  $AE = AC + CE = AC + CD = AC + AB = b + c$ , а како је  $BB' \perp AC$  и  $DM \perp AC$ , следи да је  $BB' \parallel DM$ . Због  $BD \parallel AC$ , тј.  $BD \parallel B'M$ , следи да је  $BDMB'$  паралелограм (штавише, због услова  $BB' \perp B'M$  је и правоугаоник), па је  $DM = BB' = h_b$ .

У троуглу  $\triangle ADE$  је  $AD = 2t_a$  и  $AE = b+c$ , а висина  $DM$  је подударна дужи  $h_b$ . То значи да тачка  $D$  припада правој која паралелна правој  $AE$  и налази се на растојању  $h_b$  од ње, као и да припада кругу с центром у  $A$  и полупречником  $2t_a$ . Због  $CD = CE$  следи да тачка  $C$  припада

симетрали дужи  $DE$ . Тачка  $D$  је симетрична тачки  $A$  у односу на тачку  $A_1$ , па је  $A_1$  средиште дужи  $AD$ . Такође, тачка  $A_1$  је средиште дужи  $BC$ , па следи да је тачка  $B$  симетрична тачки  $C$  у односу на тачку  $A_1$ .

### Конструкција.



Конструишимо дуж  $AE = b + c$ . Конструишимо праву  $p$  паралелну са  $AE$  на растојању  $h_b$  од ње. Конструишимо круг  $k(A, 2t_a)$ . У пресеку круга  $k$  и праве  $p$  означимо тачку  $D$ . Конструишимо симетралу дужи  $DE$ . У њеном пресеку с дужи  $AE$  означимо тачку  $C$  (дакле,  $\mathcal{B}(A, C, E)$ ). Означимо с  $A_1$  средиште дужи  $AD$  и са  $B$  тачку симетричну тачки  $C$  у односу на тачку  $A_1$ .

**Доказ.** Треба доказати да је тежишна дуж из темена  $A$  подударна дужи  $t_a$ , да је висина из темена  $B$  подударна дужи  $h_b$  и да је  $AC + AB = b + c$ .

ПК је  $A_1$  средиште странице  $BC$  троугла  $\triangle ABC$ , па је  $AA_1$  тежишна дуж из темена  $A$ . Такође, ПК је  $AD = 2t_a$  и  $A_1$  је средиште дужи  $AD$ , па следи да је  $AA_1 = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}2t_a = t_a$ .

Дијагонале  $AD$  и  $BC$  четвороугла  $ABDC$  имају заједничко средиште  $A_1$ , па је у питању паралелограм. Следи да је  $AB \parallel CD$  и  $AB = CD$ , као и  $AC \parallel BD$  и  $AC = BD$ . Нека је  $B'$  подножје висине из темена  $B$  троугла  $\triangle ABC$ . Како  $C$  припада правој  $AE$ , следи да су праве  $AC$  и  $AE$  исте, па из  $AC \parallel BD$  следи да је  $AE \parallel BD$ . Права  $p$  садржи  $D$  и паралелна је са  $AE$ , па како и права  $BD$  садржи  $D$  и паралелна је са  $AE$ , следи да су праве  $p$  и  $BD$  исте, тј. да  $B \in p$ . Све тачке с праве  $p$  су на растојању  $h_b$  од праве  $AE$ , тј. од праве  $AC$ , па како је  $BB' \perp AC$ , следи да је  $BB' = h_b$ , што је и требало доказати.

Коначно,  $C$  припада симетрали дужи  $DE$ , па је  $CD = CE$ , што заједно са  $AB = CD$  даје  $CE = AB$ . По конструкцији је  $\mathcal{B}(A, C, E)$ , па је  $AE = AC + CE = AC + AB$ , а такође је по конструкцији  $AE = b + c$ , па следи да је  $AC + AB = b + c$ .

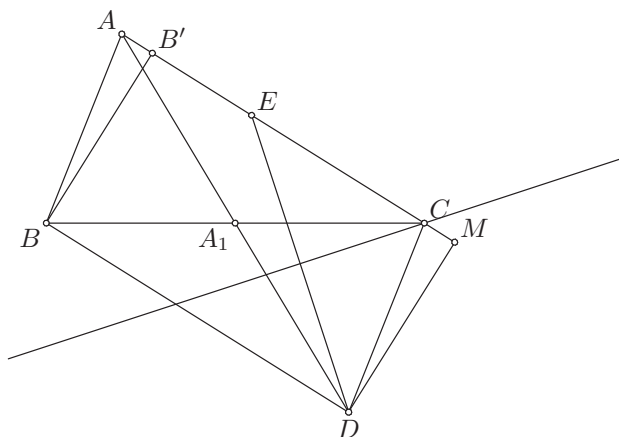
**Дискусија.** Да би круг  $k(A, 2t_a)$  и права  $p$  имали заједничких тачака, мора бити  $2t_a \geq h_b$ . Заиста, права  $p$  је на растојању  $h_b$  од праве  $AE$ , што значи да за сваку тачку  $X$  са праве  $p$  важи  $XA \geq h_b$ . Ако је  $2t_a = h_b$ , онда имамо јединствену пресечну тачку  $D$  праве  $p$  и круга  $k(A, 2t_a)$ , а

ако је  $2t_a > h_b$ , имамо две такве тачке  $D$ . Из Дискусије у делу **3)** овог задатка следи да симетрала странице  $DE$  троугла  $\triangle ADE$  сече страницу  $AE$  у тачки  $C$  таквој да је  $\mathcal{B}(A, C, E)$  ако и само ако је  $AD < AE$ , тј. ако и само ако је  $2t_a < b + c$ .

Дакле, ако је  $h_b = 2t_a < b + c$ , задатак има јединствено решење до на подударност. Ако је  $h_b < 2t_a < b + c$ , задатак има два неподударна решења. У осталим случајевима задатак нема решења.

**б)**  $t_a, h_b, b - c$

**Анализа.** Нека је  $\triangle ABC$  троугао који испуњава услове задатка. Тада је  $AC > AB$ . Нека је  $A_1$  средиште странице  $BC$  и нека је  $B'$  подножје висине из темена  $B$ . Тада је  $AA_1 = t_a$ ,  $BB' = h_b$  и  $AC - AB = b - c$ .

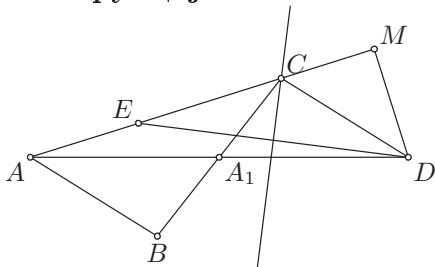


Нека је  $D$  тачка симетрична тачки  $A$  у односу на тачку  $A_1$ . Тада је  $AD = AA_1 + A_1D = 2AA_1 = 2t_a$ . У четвороуглу  $ABDC$  дијагонале  $AD$  и  $BC$  имају заједничко средиште  $A_1$ , па је то паралелограм. Следи да је  $BD \parallel AC$  и  $BD = AC$ , као и  $AB \parallel CD$  и  $AB = CD$ . Нека је  $M$  подножје нормале из тачке  $D$  на правој  $AC$  и нека је  $E$  тачка таква да је  $\mathcal{B}(A, E, C)$  и  $CE = CD$ . Тада је  $AE = AC - CE = AC - CD = AC - AB = b - c$  и троугао  $\triangle CDE$  је једнакокрак, па важи  $\angle CED = \angle CDE$  и то су оштри углови. Следи да је  $\angle AED = \pi - \angle CED$  туп угао, па важи распоред  $\mathcal{B}(A, E, M)$ . Како је  $BB' \perp AC$  и  $DM \perp AC$ , следи да је  $BB' \parallel DM$ . Због  $BD \parallel AC$ , тј.  $BD \parallel B'M$ , следи да је  $BDMB'$  паралелограм (штавише, због  $BB' \perp B'M$  је и правоугаоник), па је  $DM = BB' = h_b$ . Угао  $\angle AED$  је туп, а угао  $\angle AMD$  је прав, па следи да је  $\mathcal{B}(A, E, M)$ . Следи да је  $E$  тачка на страници  $AM$  таква да је  $AE = b - c$ .

У троуглу  $\triangle ADM$  је  $AD = 2t_a$ ,  $DM = h_b$  и  $\angle AMD = \frac{\pi}{2}$ , па унемо да га конструишемо. Тачка  $E$  је таква да је  $\mathcal{B}(A, E, M)$  и  $AE = b - c$ . Због  $CD = CE$  следи да тачка  $C$  припада симетрали дужи  $DE$ . Тачка  $D$  је симетрична тачки  $A$  у односу на тачку  $A_1$ , па је  $A_1$  средиште дужи

$AD$ . Такође, тачка  $A_1$  је средиште дужи  $BC$ , па следи да је тачка  $B$  симетрична тачки  $C$  у односу на тачку  $A_1$ .

### Конструкција.



Конструиримо троугао  $\triangle ADM$  такав је  $AD = 2t_a$ ,  $DM = h_b$  и  $\angle AMD = \frac{\pi}{2}$ . На дужи  $AM$  означимо тачку  $E$  такву да је  $AE = b - c$  (дакле,  $\mathcal{B}(A, E, M)$ ). Конструиримо симетралу дужи  $ED$  и означимо са  $C$  њен пресек са правом  $AE$  тако да важи  $\mathcal{B}(A, E, C)$ . Означимо са  $A_1$  средиште дужи  $AD$  и означимо са  $B$  тачку симетричну тачки  $C$  у односу на тачку  $A_1$ .

**Доказ.** Треба доказати да је тежишна дуж из темена  $A$  подударна дужи  $t_a$ , да је висина из темена  $B$  подударна дужи  $h_b$  и да је  $AC > AB$  и  $AC - AB = b - c$ .

ПК је  $A_1$  средиште странице  $BC$  троугла  $\triangle ABC$ , па је  $AA_1$  тежишна дуж из темена  $A$ . Такође, ПК је  $AD = 2t_a$  и  $A_1$  је средиште дужи  $AD$ , следи да је  $AA_1 = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}2t_a = t_a$ .

Дијагонале  $AD$  и  $BC$  четвороугла  $ABDC$  имају заједничко средиште  $A_1$ , па је у питању паралелограм. Следи да је  $AB \parallel CD$  и  $AB = CD$ , као и  $AC \parallel BD$  и  $AC = BD$ . Нека је  $B'$  подножје висине из темена  $B$  троугла  $\triangle ABC$ . ПК је  $BB' \perp AC$  и  $DM \perp AM$ , а како су  $A, C, M$  колинеарне, следи да је  $DM \perp AM$ , па важи  $BB' \parallel DM$ . Ово заједно са  $AC \parallel BD$  и чињеницом да су праве  $B'M$  и  $AC$  исте јер су тачке  $A, B', M, C$  колинеарне, следи да је  $BD \parallel B'M$ , па је четвороугао  $BB'MD$  паралелограм (штавише правоугаоник, јер је  $BB' \perp B'M$ ), што значи да је  $BB' = DM$ . ПК је  $DM = h_b$ , па је  $BB' = h_b$ .

Коначно,  $C$  припада симетрали дужи  $DE$ , па је  $CD = CE$ , што заједно са  $AB = CD$  даје  $CE = AB$ . ПК је  $\mathcal{B}(A, E, C)$ , па је  $AC > CE$ , односно  $AC > AB$ . Такође, важи  $AE = AC - CE = AC - AB$ , а ПК је  $AE = b - c$ , па следи да је  $AC - AB = b - c$ .

**Дискусија.** Да би троугао  $\triangle ADM$  могао да се конструише, мора бити  $AD > DM$  (јер је  $AD$  хипотенуза, а  $DM$  је катета правоуглог троугла  $\triangle ADM$ ), тј. мора бити  $2t_a > h_b$ . Даље, да би било  $\mathcal{B}(A, E, M)$ , мора бити  $AE < AM$ . Из Питагорине теореме следи да је  $AD^2 = AM^2 + DM^2$ ,

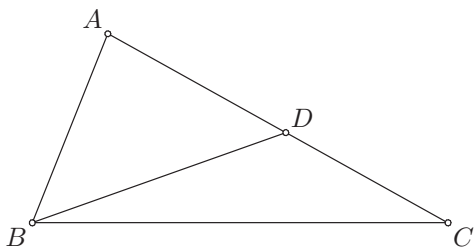
па је  $AM = \sqrt{AD^2 - DM^2} = \sqrt{(2t_a)^2 - h_b^2} = \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$ . Дакле, како је  $AE = b - c$ , добијамо услов  $b - c < \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$ .

Остаје још да проверимо да ли је испуњено  $\mathcal{B}(A, E, C)$ . Угао  $\angle MED$  је оштар, јер је један од углова правоуглог троугла  $\triangle MED$  који није прав ( $\angle EMD = \angle AMD = \frac{\pi}{2}$  јер важи  $\mathcal{B}(A, E, M)$ ). Следи да симетрала дужи  $ED$  сече крак  $EM$  оштрог угла  $\angle MED$  у тачки  $S$  таквој да важи  $M, S \div E$ , па како важи  $A, M \div E$ , следи да важи  $A, S \div E$ , тј.  $\mathcal{B}(A, E, C)$ .

Према томе, ако је  $2t_a > h_b$  и  $b - c < \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$ , постоји јединствено решење до на подударност. У свим осталим случајевима, задатак нема решења.

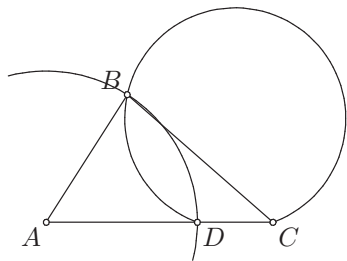
6)  $\beta - \gamma, b, c$

**Анализа.** Нека је  $\triangle ABC$  троугао који испуњава услове задатка. Тада је  $\angle ABC > \angle ACB$  и важи  $AC = b$ ,  $AB = c$  и  $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$ .



Како је насупрам већег угла већа страница, следи да је  $AC > AB$ , тј. да је  $b > c$ . Нека је  $D$  тачка таква да је  $\mathcal{B}(A, D, C)$  и  $AD = AB$ . Тада је троугао  $\triangle ABD$  једнакокрак, па је  $\angle ADB = \angle ABD = \frac{\pi - \angle BAC}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2}$ . С друге стране, угао  $\angle ADB$  је спољашњи угао троугла  $\triangle BCD$ , па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова  $\angle CBD = \varphi$  и  $\angle BCD = \angle BCA = \gamma$ . Дакле,  $\frac{\beta + \gamma}{2} = \varphi + \gamma$ , па је  $\varphi = \frac{\beta + \gamma}{2} - \gamma = \frac{\beta + \gamma - 2\gamma}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$ . Дакле,  $\angle CBD = \frac{\beta - \gamma}{2}$ , тј. дуж  $CD$  се из тачке  $B$  види под углом  $\frac{\beta - \gamma}{2}$ .

**Конструкција.**



Конструирамо дуж  $AC = b$ . Означимо са  $D$  тачку такву да је  $\mathcal{B}(A, D, C)$  и  $AD = c$ . Конструирамо један од лукова ГМТ из којих се дуж  $CD$  види под углом  $\frac{\beta - \gamma}{2}$  и означимо га са  $l$ . Конструирамо круг

$k(A, AD)$ . Означимо са  $B$  ону пресечну тачку круга  $k$  и лука  $l$  која није тачка  $D$ .

**Доказ.** Треба доказати да је  $\angle ABC > \angle ACB$  и да је  $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$ , као и да је  $AC = b$  и  $AB = c$ .

ПК је  $AC = b$ . Тачка  $B$  припада кругу  $k(A, AD)$  и ПК је  $AD = c$ , па је  $AB = AD = c$ . ПК је  $\mathcal{B}(A, D, C)$ , па је  $AC > AD$ . Због  $AD = AB$  следи да је  $AC > AB$ , па је и  $\angle ABC > \angle ACB$ . Тачка  $B$  припада луку  $l$  ГМТ из којих се дуж  $CD$  види под углом  $\frac{\beta - \gamma}{2}$ , па следи да је  $\angle CBD = \frac{\beta - \gamma}{2}$ . С друге стране, троугао  $\triangle ABD$  је једнакокрак, па је  $\angle ADB = \angle ABD = \frac{\pi - \angle BAD}{2}$ , а угао  $\angle ADB$  је спољашњи угао троугла  $\triangle BCD$ , па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова, тј.  $\angle ADB = \angle CBD + \angle BCD$ . Због распореда  $\mathcal{B}(A, D, C)$  је  $\angle BAD = \angle BAC$  и  $\angle BCD = \angle BCA$ . Следи да је

$$\begin{aligned}\angle CBD &= \angle ADB - \angle BCD = \frac{\pi - \angle BAD}{2} - \angle BCD \\ &= \frac{\pi - \angle BAC}{2} - \angle BCA = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} - \angle BCA \\ &= \frac{\angle ABC + \angle ACB - 2\angle BCA}{2} = \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2}.\end{aligned}$$

Дакле, важи  $\frac{\angle ABC - \angle ACB}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$ , па следи да је  $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$ .

**Дискусија.** Ако је  $b \leq c$  или  $\beta - \gamma \geq \pi$ , задатак нема решења.

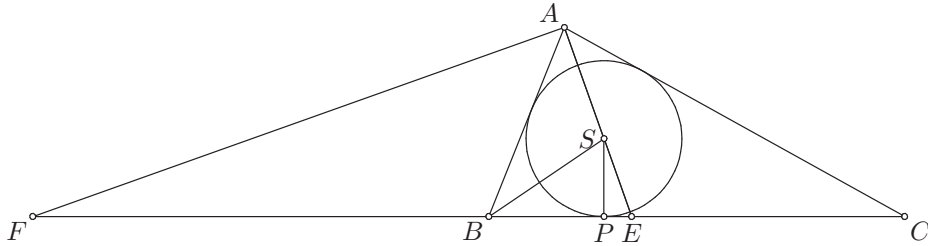
Нека је  $b > c$  и  $\beta - \gamma < \pi$ . Све што треба проверити јесте да ли круг  $k$  и лук  $l$  осим тачке  $D$  имају још заједничких тачака. Круг  $k$  и лук  $l$  се додирују ако и само ако центар лука  $l$  припада дужи  $CD$ , што важи ако и само ако је угао под којим се са лука  $l$  види дуж  $CD$  прав, односно ако и само ако је  $\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\pi}{2}$ , тј.  $\beta - \gamma = \pi$ , што није тачно. Дакле, круг  $k$  и круг који садржи лук  $l$  имају две пресечне тачке. Њихова друга пресечна тачка не припада луку  $l$  (тј. припада другом луку  $\widehat{CD}$ ) ако и само ако се центар круга који садржи лук  $l$  налази са оне стране праве  $CD$  с које се не налази лук  $l$ , а то важи ако и само ако је угао под којим се са лука  $l$  види дуж  $CD$  туп, односно ако и само ако је  $\frac{\beta - \gamma}{2} > \frac{\pi}{2}$ , тј.  $\beta - \gamma > \pi$ , што такође није тачно.

Дакле, ако је  $b > c$  и  $\beta - \gamma < \pi$ , онда задатак има јединствено решење до на подударност.

**7)**  $\beta - \gamma, l_a, \rho$

**Дефиниција 23.** Нека је  $\triangle ABC$  троугао и нека су  $E, F, G$  редом пресечне тачке бисектриса унутрашњих углова код темена  $A, B, C$  и наспрамних страница  $BC, CA, AB$ . Дужи  $AE, BF, CG$  зову се *одсечци бисектриса унутрашњих углова* и означавају се редом са  $l_a, l_b, l_c$ .

**Анализа.** Нека је  $\triangle ABC$  троугао који испуњава услове задатка. Тада је  $\angle ABC > \angle ACB$  и  $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$ . Нека је  $S$  центар уписаног круга троугла  $\triangle ABC$ , нека је  $E$  пресечна тачка симетрале угла  $\angle BAC$  и стране  $BC$  и нека је  $P$  подножје нормале из тачке  $S$  на страници  $BC$ . Следи да је  $AE = l_a$  и  $SP = \rho$ .



Из  $\angle ABC > \angle ACB$  следи да је  $AC > AB$ , па постоји пресечна тачке симетрале спољашњег угла код темена  $A$  и праве  $BC$ . Означимо је са  $F$ . Тада важи распоред тачака  $\mathcal{B}(F, B, E, C)$ . Угао  $\angle ABC$  је спољашњи угао троугла  $\triangle AFB$ , па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова  $\angle AFB$  и  $\angle FAB$ , а угао  $\angle FAE$  је прав, јер је то угао између симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена  $A$  троугла  $\triangle ABC$ . Следи да је  $\angle FAB = \angle FAE - \angle BAE = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2}$ , па је  $\angle ABC = \angle AFB + \angle FAB = \angle AFB + \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2}$ . Дакле,  $\angle AFB = \angle ABC - \frac{\pi}{2} + \frac{\angle BAC}{2} = \frac{2\angle ABC - \angle BAC - \angle ABC - \angle ACB + \angle BAC}{2} = \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$ .

У троуглу  $\triangle AFE$  је  $AE = l_a$ ,  $\angle AFE = \angle AFB = \frac{\beta - \gamma}{2}$  и  $\angle FAE = \frac{\pi}{2}$ , па тај троугао унемо да конструишемо. Како је  $P$  подножје нормале из тачке  $S$  на страници  $BC$ , тј. на правој  $FE$  и важи  $SP = \rho$ , следи да тачка  $S$  припада правој  $p$  која је паралелна са  $FE$  и налази се на растојању  $\rho$  од ње. При томе важи  $A, S \div BC$ , тј.  $A, S \div FE$ , па важи и  $A, p \div FE$ . Уписани круг  $k(S, \rho)$  додирује странице  $AB$  и  $AC$ , па су праве  $AB$  и  $AC$  тангенте из тачке  $A$  на уписаном кругу  $k$  троугла  $\triangle ABC$ . Тачке  $B, C$  су у пресеку тих тангенти и праве  $FE$  тако да важи распоред тачака  $\mathcal{B}(F, B, E, C)$ .

**Конструкција.** Конструишемо троугао  $\triangle AFE$  такав да је  $AE = l_a$ ,  $\angle AFE = \frac{\beta - \gamma}{2}$  и  $\angle FAE = \frac{\pi}{2}$ . Конструишимо праву  $p$  паралелну са  $FE$  која се налази на растојању  $\rho$  од ње и за коју важи  $A, p \div FE$ . У пресеку праве  $p$  и дужи  $AE$  означимо тачку  $S$  (дакле, важи  $\mathcal{B}(A, S, E)$ ). Конструишимо круг  $k(S, \rho)$  и конструишимо тангенте из тачке  $A$  на кругу  $k$ . У пресеку тих тангенти и праве  $FE$  означимо тачке  $B, C$  тако да важи  $\mathcal{B}(F, B, E, C)$ .

**Доказ.** Треба доказати да је  $\angle ABC > \angle ACB$  и да је  $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$ , затим да је одсечак бисектрисе унутрашњег угла код темена  $A$

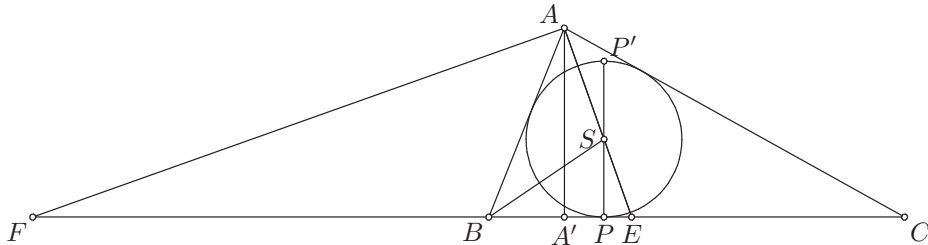
подударан дужи  $l_a$  и да је полупречник уписаног круга подударан дужи  $\rho$ .

Тачка  $S$  је ПК на растојању  $\rho$  од праве  $FE$ , тј. од праве  $BC$ , па како је ПК  $k$  круг с центром у  $S$  и полупречником  $\rho$ , следи да је  $BC$  тангента на кругу  $k$ . ПК тачке  $B, C$  припадају тангентама из тачке  $A$  на кругу  $k$ , па су праве  $AB, AC$  тангенте на кругу  $k$ . ПК важи распоред  $\mathcal{B}(B, E, C)$ , па полуправа  $AE$  припада углу  $\angle BAC$ . При томе, за тачку  $S$  са ње важи да је растојање од крака  $AB$  тог угла подударно дужи  $\rho$ , као и растојање од крака  $AC$  тог угла (јер круг  $k(S, \rho)$  додирује праве  $AB$  и  $AC$ ), па је полуправа  $AE$  бисектриса угла  $\angle BAC$ . Према томе, круг  $k$  је или уписани круг троугла  $\triangle ABC$  или је споља уписани круг који додирује страну  $BC$  (у Великом задатку означен са  $k_a(S_a, \rho_a)$ ). Како важи  $\mathcal{B}(A, S, E)$ , закључујемо да је  $k$  уписани круг троугла  $\triangle ABC$ , па је његов полупречник  $\rho$ , што је и требало доказати,

Такође, како је полуправа  $AE$  бисектриса унутрашњег угла код темена  $A$  троугла  $\triangle ABC$ , следи да је  $E$  тачка у пресеку те бисектрисе и стране  $BC$ , па је  $AE$  одсечак бисектрисе унутрашњег угла код темена  $A$ , а ПК је та дуж подударна дужи  $l_a$ .

Како је  $\angle FAE = \frac{\pi}{2}$ , следи да је  $AF$  бисектриса спољашњег угла код темена  $A$  троугла  $\triangle ABC$  (јер је нормална на бисектриси  $AE$  унутрашњег угла код темена  $A$ ). Угао  $\angle AEF$  је оштар (јер је угао правоуглог троугла  $\triangle AFE$  који није прав угао) и он је спољашњи угао троугла  $\triangle AEC$ , па је једнак збиру његових унутрашњих несуседних углова  $\angle EAC = \frac{\angle BAC}{2}$  и  $\angle ACE = \angle ACB$ . Дакле,  $\frac{\angle BAC}{2} + \angle ACB < \frac{\pi}{2}$ , па следи да је и  $\angle BAC + 2\angle ACB < \pi = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$ , тј.  $\angle ACB < \angle ABC$ . У делу Анализа је доказано да је тада  $\angle AFB = \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2}$ , а како ПК важи  $\mathcal{B}(F, B, E)$  и  $\angle AFE = \frac{\beta - \gamma}{2}$ , следи да је  $\angle AFB = \frac{\beta - \gamma}{2}$ . Према томе,  $\frac{\angle ABC - \angle ACB}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$ , тј.  $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$ .

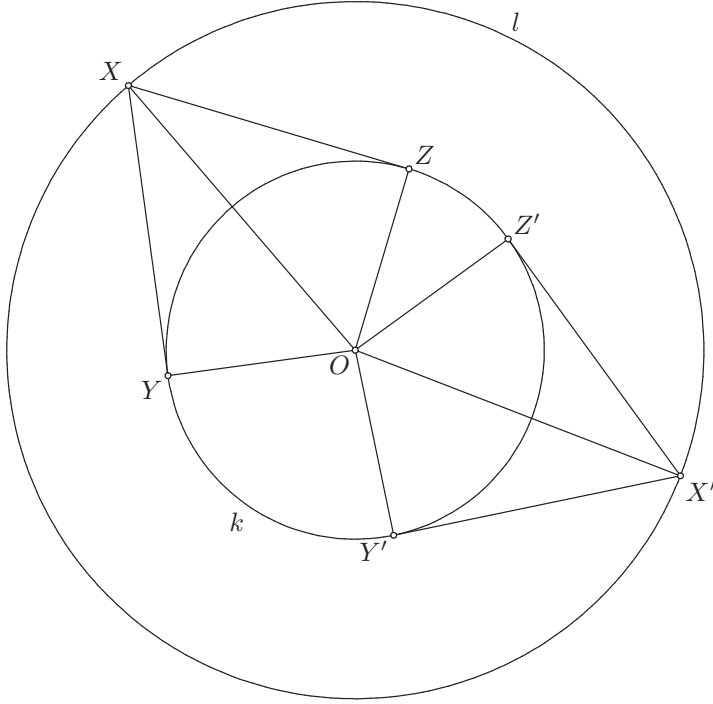
**Дискусија.** Ако је  $\beta - \gamma \geq \pi$ , задатак нема решења.



Нека је  $\beta - \gamma < \pi$ . Тада је  $\frac{\beta - \gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$ , па постоји троугао  $\triangle AFE$  и јединствен је до на подударност. Нека је  $A'$  подножје висине из темена  $A$  у троуглу  $\triangle AFE$ . Тада важи распоред  $\mathcal{B}(F, A', E)$ , па је и  $\angle A'AE = \frac{\pi}{2} - \angle A'EA = \frac{\pi}{2} - \angle FEA = \angle AFE = \frac{\beta - \gamma}{2}$ . Такође,  $AA'$  је и висина

троугла  $\triangle ABC$ . Да би важило  $\mathcal{B}(A, S, E)$ , да би се тачка  $A$  налазила у спољашњости круга  $k(S, \rho)$  и да би тангенте из тачке  $A$  на кругу  $k$  секле праву  $FE$  у тачкама  $B, C$  таквим да важи  $\mathcal{B}(F, B, E, C)$ , потребно је и довољно да висина  $AA'$  буде већа од пречника круга  $k$ , тј. да важи  $AA' > 2\rho$ . Из правоуглог троугла  $\triangle AA'E$  имамо  $\cos \angle A'AE = \frac{AA'}{AE} = \frac{AA'}{l_a}$ , тј. да је  $AA' = l_a \cos \angle A'AE = l_a \cos \frac{\beta-\gamma}{2}$ . Према томе, услов је  $l_a \cos \frac{\beta-\gamma}{2} > 2\rho$ . Према томе, ако је  $\beta-\gamma < \pi$  и  $l_a \cos \frac{\beta-\gamma}{2} > 2\rho$ , постоји јединствено решење до на подударност. У осталим случајевима, задатак нема решења.

**Напомена 11.** Претходни задатак може се решити посматрајући само троугао  $\triangle AA'E$  код кога је  $\angle AA'E = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle A'AE = \frac{\beta-\gamma}{2}$  и  $AE = l_a$ , тј. не мора се посматрати бисектриса  $AF$  спољашњег угла код темена  $A$ .



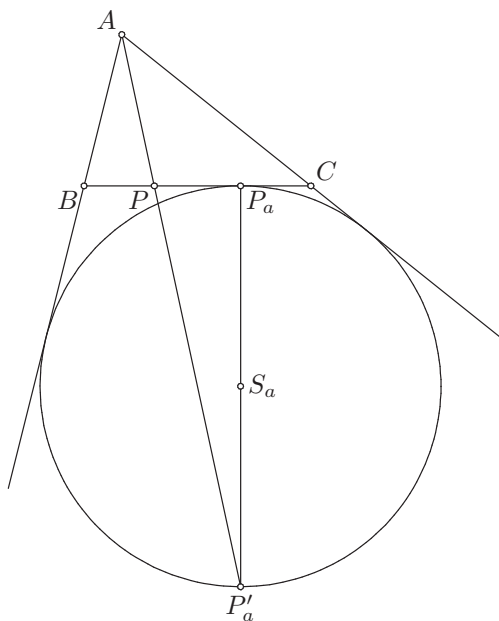
Шта представља ГМТ  $l$  из којих се дати круг  $k(O, r)$  види под углом  $\varphi$ ? Нека је  $X$  произвољна тачка са  $l$  и нека су  $Y, Z$  додирне тачке круга  $k$  и тангенте из тачке  $X$  на кругу  $k$ . Тада је  $\angle YXZ = \varphi$ . Такође, како је  $XO = XO$ ,  $OY = r = OZ$  и  $\angle OYX = \frac{\pi}{2} = \angle OZX$ , на основу става ССУ (ако су углови  $\angle OYX$  и  $\angle OZX$  наспрам  $XO$  прави, онда су углови  $\angle OXY$  и  $\angle OXZ$  наспрам  $OY$  и  $OZ$  оба оштра) да су троуглови  $\triangle XOY$  и  $\triangle XOZ$  подударни. Специјално, одатле следи да је  $\angle OXY = \angle OXZ = \frac{\varphi}{2}$ . Посматрајмо нпр. троугао  $\triangle XOY$ . То је правоугли троугао с правим углом код темена  $Y$ , угао  $\angle OXY$  је подударан са

углом  $\frac{\varphi}{2}$  и катета  $OY$  је подударна са полупречником  $r$  круга  $k$ . Ако је  $X'$  нека друга тачка са  $l$ , тј. нека друга тачка из које се круг  $k(O, r)$  види под углом  $\varphi$  и ако су  $Y', Z'$  додирне тачке круга  $k$  и тангенти из тачке  $X'$  на кругу  $k$ , претходним закључивањем ћемо добити да су троуглови  $\triangle X'OY'$  и  $\triangle X'OZ'$  подударни и да је нпр. троугао  $\triangle X'OY'$  правоугли с правим углом код темена  $Y'$  код кога је  $\angle OX'Y' = \frac{\varphi}{2}$  и  $OY' = r$ . Следи да је  $\triangle XOY \cong \triangle X'OY'$ , па је  $OX = OX'$ . Како су тачке  $X, X'$  са  $l$  биле произвољне, следи да је оне припадају кругу  $l'$  с центром  $O$  чији је полупречник подударан хипотенузи правоуглог троугла чија је једна катета подударна дужи  $r$  и угао наспрам ње подударан углу  $\frac{\varphi}{2}$ .

Треба још доказати обрнути смер, тј. да се из сваке тачке  $X$  са круга  $l'$  круг  $k$  види под углом  $\varphi$ . Нека су  $Y, Z$  додирне тачке круга  $k$  и тангенти из тачке  $X$  на кругу  $k$ . Слично као и до сада следи да је  $\triangle XOY \cong \triangle XOZ$ . Посматрамо нпр. троугао  $\triangle XOY$  у коме је угао  $\angle OY''X''$  прав и катета  $OY''$  је подударна дужи  $r$ . Ако је  $X'$  произвољна тачка са ГМТ  $l$  и ако су  $Y', Z'$  додирне тачке круга  $k$  и тангенти из тачке  $X'$  на кругу  $k$ , следи да је  $\triangle X'OY'$  правоугли с правим углом код темена  $Y'$  код кога је  $OY' = r$  и  $\angle OX'Y' = \frac{\varphi}{2}$ . Полупречник круга  $l'$  је подударан хипотенузи правоуглог троугла чија је једна катета подударна дужи  $r$  и угао наспрам ње подударан са  $\frac{\varphi}{2}$ , па следи да је он подударан са  $OX'$ . Како је  $OX$  један полупречник круга  $l'$ , следи да је  $OX = OX'$ ,  $\angle OYX = \frac{\pi}{2} = \angle OY'X'$  и  $OY = r = OY'$ , па следи и  $\triangle XOY \cong \triangle X'OY'$ . Дакле,  $\angle OXY = \angle OX'Y' = \frac{\varphi}{2}$ , а како је  $\angle OXZ = \angle OXY$ , следи да је  $\angle YXZ = \angle OXZ + \angle OXY = \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = \varphi$ . Према томе, из произвољне тачке  $X$  са круга  $l'$  се круг  $k$  види под углом  $\varphi$ , па је ГМТ  $l$  из којих се круг  $k$  види под углом  $\varphi$  круг  $l'$ .

8)  $\alpha, b - c, \rho_a$

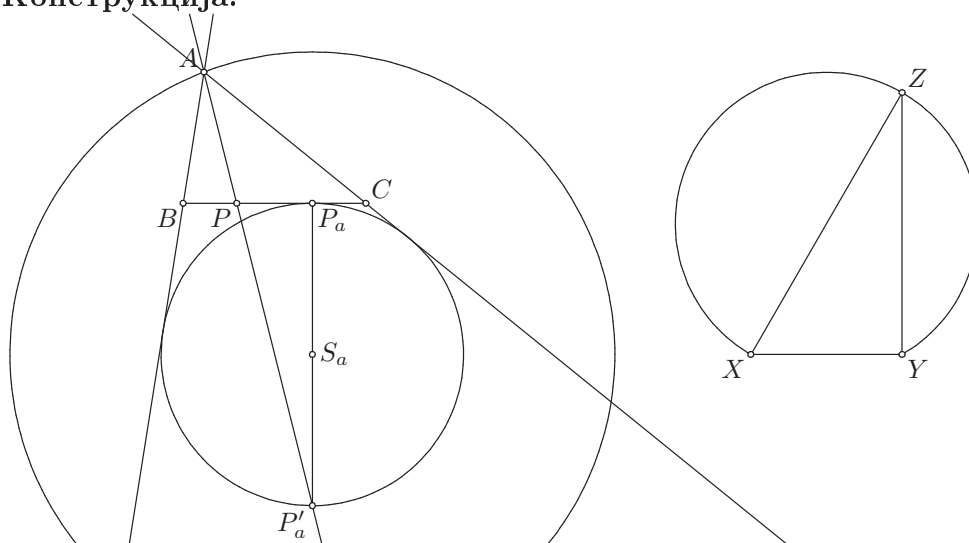
**Анализа.** Нека је  $\triangle ABC$  троугао који испуњава услове задатка. Тада је  $AC > AB$ ,  $\angle BAC = \alpha$ ,  $AC - AB = b - c$  и полупречник споља уписаног круга који додирује страницу  $BC$  је подударан дужи  $\rho_a$ .



Нека су  $P, S_a, P_a, P'_a$  тачке из Великог задатка. На основу Великог задатка следи да важи  $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ , као и  $PP_a = b - c$ .

У троуглу  $\triangle PP_aP'_a$  је  $PP_a = b - c$ ,  $\angle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$  и  $P_aP'_a = 2\rho_a$ , па тај троугао унемо да конструишемо. Тачка  $S_a$  је средиште странице  $P_aP'_a$  и можемо конструисати круг  $k_a(S_a, \rho_a)$ . Тачка  $A$  припада правој  $PP'_a$  тако да важи  $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$  и из тачке  $A$  се круг  $k_a$  види под углом  $\alpha$ . Тачке  $B, C$  су пресечне тачка тангенти из тачке  $A$  на кругу  $k_a$  и праве  $PP_a$  тако да важи  $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ .

### Конструкција.



Конструиримо троугао  $\triangle PP_aP'_a$  такав да је  $PP_a = b - c$ ,  $\angle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$

и  $P_a P'_a = 2\rho_a$ . Означимо са  $S_a$  средиште странице  $P_a P'_a$  и конструишимо круг  $k_a(S_a, \rho_a)$ . Конструишимо правоугли троугао  $\triangle XYZ$  с правим углом код темена  $X$  такав да је  $XY = \rho_a$  и  $\angle XZY = \frac{\alpha}{2}$ . Конструишимо круг  $l(S_a, YZ)$  и означимо са  $A$  пресечну тачку круга  $l$  и праве  $PP'_a$  такву да важи  $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ . Конструишимо тангенте из тачке  $A$  на кругу  $k_a$  и означимо са  $B, C$  њихове пресеке са правом  $PP_a$  тако да важи  $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ .

**Доказ.** Треба доказати да је  $\angle BAC = \alpha$ ,  $AC > AB$  и  $AC - AB = b - c$ , као и да је полупречник споља уписаног круга који додирује страницу  $BC$  подударан дужи  $\rho_a$ .

Тачке  $B, C$  припадају тангентама из тачке  $A$  на кругу  $k_a$ , па су праве  $AB, AC$  тангенте на кругу  $k_a$ . ПК је  $S_a$  средиште  $P_a P'_a$  и  $\angle PP_a P'_a = \frac{\pi}{2}$ , па следи да је  $PP_a \perp P_a S_a$ . ПК је  $P_a P'_a = 2\rho_a$ , па следи да је  $S_a P_a = \frac{1}{2}P_a P'_a = \frac{1}{2}2\rho_a = \rho_a$ , тј.  $S_a P_a$  је полупречник круга  $k_a(S_a, \rho_a)$ . Дакле, права  $PP_a$  је нормална на полупречнику круга  $k_a$ , па је она тангента на том кругу. Штавише, како је  $S_a P_a = \rho_a$ , следи да је тачка  $P_a$  додирна тачка круга  $k_a$  и праве  $PP_a$ . Како ПК важи  $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ , следи да је права  $BC$  исто што и права  $PP_a$  и да тачка  $P_a$  припада дужи  $BC$ , па круг  $k_a$  додирује страницу  $BC$  троугла  $\triangle ABC$ . Дакле, круг  $k_a$  је или уписани круг троугла  $\triangle ABC$  или је споља уписани круг који додирује страницу  $BC$ . Како ПК важи  $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$  и  $P \in BC$ , следи да важи  $A, P'_a \div BC$ . Такође,  $P'_a P_a \perp BC$ ,  $P'_a P_a = 2\rho_a$  и  $P'_a S_a = \rho_a$ , па следи да важи  $P'_a, S_a \div BC$ . Према томе, важи  $A, S_a \div BC$ , па је  $k_a$  споља уписани круг који додирује страницу  $BC$ . Осим смо доказали и да је полупречник споља уписаног круга који додирује страницу  $BC$  подударан дужи  $\rho_a$ .

ПК је  $l$  круг чији је центар тачка  $S_a$  и полупречник дуж  $YZ$  која је хипотенуза правоуглог троугла  $\triangle XYZ$  са катетом  $XY = \rho_a$  и углом  $\angle XZY = \frac{\alpha}{2}$ , па следи да је круг  $l$  ГМТ из којих се круг  $k_a(S_a, \rho_a)$  види под углом  $\alpha$ . Нека су  $Q_a, R_a$  редом додирне тачке споља уписаног круга  $k_a$  и правих  $AC, AB$ . Тада важе распореди  $\mathcal{B}(A, C, Q_a)$  и  $\mathcal{B}(A, B, R_a)$ . Како тачка  $A$  припада кругу  $l$ , следи да је  $\angle R_a A Q_a = \alpha$ , а због претходних распореда тачака следи и  $\angle BAC = \alpha$ .

Тачке  $S_a, P_a$  су редом центар споља уписаног круга који додирује страницу  $BC$  и његова додирна тачка са страницом  $BC$ . Тачка  $S_a$  је средиште дужи  $P_a P'_a$ , па је тачка  $P'_a$  дијаметрално супротна тачки  $P_a$ , што значи да је у питању тачка из Великог задатка. Тврђење 1) Великог задатка каже да су теме  $A$ , додирна тачка уписаног круга и странице  $BC$  и тачка  $P'_a$  колинеарне и да су тим редом распоређене на правој која их садржи. Како је пресечна тачка праве  $AP'_a$  и странице  $BC$  тачка  $P$ , на основу овог тврђења следи да је тачка  $P$  додирна тачка уписаног круга и странице  $BC$ , тј. да је и она тачка из Великог задатка. На основу

Великог задатка је  $AR_a$  подударно полуобиму троугла  $\triangle ABC$ ,  $BP_a = BR_a = AR_a - AB$  и  $BP = AR_a - AC$ . Како важи распоред  $\mathcal{B}(B, P, P_a)$  следи да је  $BP_a > BP$ , па је  $AR_a - AB > AR_a - AC$ , тј.  $AC > AB$ . Сада имамо и да је  $PP_a = BP_a - BP = AR_a - AB - (AR_a - AC) = AC - AB$ , а како је ПК  $PP_a = b - c$ , следи да је  $AC - AB = b - c$ .

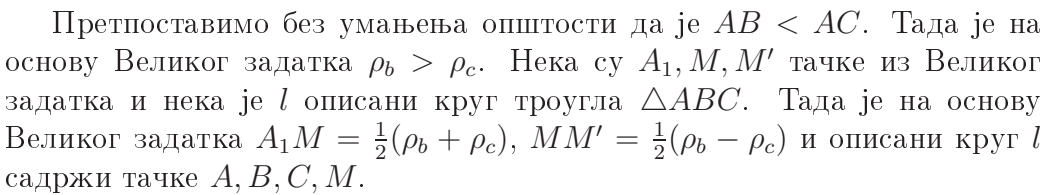
**Дискусија.** Ако је  $\alpha \geq \pi$ , не постоји троугао  $\triangle ABC$  коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

Нека је  $\alpha < \pi$ . Постоји троугао  $\triangle PP_aP'_a$  и јединствен је до на подударност, па постоји и јединствено средиште  $S_a$  странице  $P_aP'_a$ . Права  $PP_a$  сече круг  $k_a$  у двема тачкама, па ће сећи и круг  $l$  (ГМТ из којих се круг  $k_a$  види под углом  $\alpha$ ) у двема тачкама, при чему је једна од њих са оне стране тачке  $P'_a$  с које је тачка  $P$ , а друга је са супротне стране. Њу смо означили са  $A$ . Да би важило  $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$  (пошто може важити и  $\mathcal{B}(P, A, P'_a)$ ), мора важити  $S_aA > S_aP$ , тј. тачка  $P$  мора бити унутар круга  $l$ . Из Питагорине теореме је  $S_aP^2 = S_aP_a^2 + P_aP^2 = \rho_a^2 + (b - c)^2$ , па је  $S_aP = \sqrt{\rho_a^2 + (b - c)^2}$ , а како је  $S_aA$  хипотенуза правоуглог троугла коме је једна катета подударна са полупречником  $\rho_a$  круга  $k_a$  и угао наспрам ње подударан са  $\frac{\alpha}{2}$ , следи да је  $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho_a}{S_aA}$ , тј.  $S_aA = \frac{\rho_a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ . Дакле, имамо услов  $\frac{\rho_a}{\sin \frac{\alpha}{2}} > \sqrt{\rho_a^2 + (b - c)^2}$ . Овим смо обезбедили и да тачка  $A$  буде у спољашњости круга  $k_a$ , па постоје и тангенте из ње на кругу  $k_a$ . Такође, пошто смо обезбедили да важи  $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ , оне ће сећи праву  $PP_a$  тако да се тачке  $P, P_a$  нађу између тих пресечних тачака, па услов  $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$  служи само томе да се јединствено одреди која је од тих пресечних тачака тачка  $B$ , а која је тачка  $C$ .

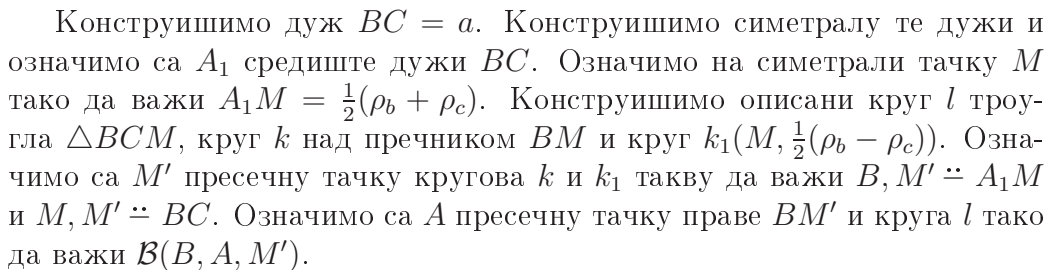
Према томе, ако је  $\alpha < \pi$  и  $\frac{\rho_a}{\sin \frac{\alpha}{2}} > \sqrt{\rho_a^2 + (b - c)^2}$ , постоји јединствено решење до на подударност. У осталим случајевима задатак нема решења.

9)  $a, \rho_b, \rho_c$

**Анализа.** Нека је  $\triangle ABC$  троугао који испуњава услове задатка. Тада је  $BC = a$ , полупречник споља уписаног круга који додирује страницу  $AC$  је подударан дужи  $\rho_b$  и полупречник споља уписаног круг који додирује страницу  $AB$  је подударан дужи  $\rho_c$ .



### Конструкција.



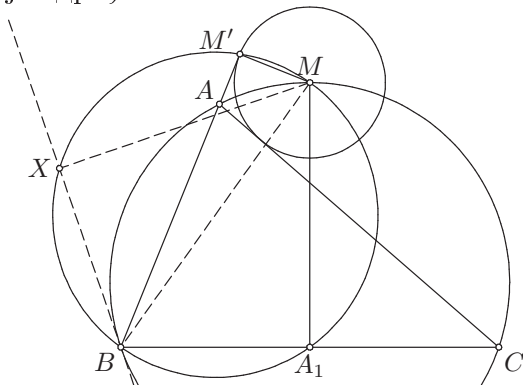
104

споља уписаног круга који додирује страницу  $AB$  подударан дужи  $\rho_c$ .

ПК је  $BC = a$ .

Тачка  $M$  припада симетрали странице  $BC$  и из распореда  $\mathcal{B}(B, A, M')$ , тј.  $A, M' \asymp BC$  и  $M, M' \asymp BC$  следи да важи  $A, M \asymp BC$ , па је  $M$  тачка из Великог задатка. Тачка  $M'$  припада кругу над пречником  $BM$ , па је  $\angle BM'M = \frac{\pi}{2}$ . Из  $B, M' \asymp A_1M$  и  $\mathcal{B}(B, A, M')$  следи да је  $M'$  подножје нормале из  $M$  на правој  $AB$ , тј. да је  $M'$  тачка из Великог задатка, као и да важи  $B, A \asymp A_1M$ , тј. темена  $A, B$  су с исте стране симетрале странице  $BC$ . Одавде следи да је  $AB < AC$ . Означимо споља уписане кругове који додирују странице  $AC, AB$  редом са  $k_b(S_b, S_bP_b), k_c(S_c, S_cP_c)$  (тачке  $S_b, S_c, P_b, P_c$  су из Великог задатка). Из  $AB < AC$  следи да је  $S_bP_b > S_cP_c$ . Треба доказати да је  $S_bP_b = \rho_b$  и  $S_cP_c = \rho_c$ . На основу Великог задатка је  $A_1M = \frac{1}{2}(S_bP_b + S_cP_c)$  и  $MM' = \frac{1}{2}(S_bP_b - S_cP_c)$ , а ПК је  $A_1M = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$  и  $MM' = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$ . Следи да је  $\frac{1}{2}(S_bP_b + S_cP_c) = \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c)$  и  $\frac{1}{2}(S_bP_b - S_cP_c) = \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c)$ , тј.  $S_bP_b + S_cP_c = \rho_b + \rho_c$  и  $S_bP_b - S_cP_c = \rho_b - \rho_c$ . Сабирањем ових једнакости добијамо  $2S_bP_b = 2\rho_b$ , тј.  $S_bP_b = \rho_b$ , а њиховим одузимањем добијамо  $2S_cP_c = 2\rho_c$ , тј.  $S_cP_c = \rho_c$ .

**Дискусија.** Дискутујемо само о случају када је  $AB < AC$ , тј.  $\rho_b > \rho_c$ . Круг  $k$  над пречником  $BM$  садржи тачку  $A_1$  јер је  $\angle BA_1M = \frac{\pi}{2}$ . Како је  $\frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c) < \frac{1}{2}(\rho_b + \rho_c) = MA_1$ , тј. полупречник круга  $k_1$  је мањи од  $MA_1$ , следи да су све тачке тог круга с исте стране праве  $BC$  с које је и тачка  $M$ . Такође, следи да круг  $k_1$  сече круг  $k$  у два тачкама, при чему је једна од њих са оне стране праве  $A_1M$  с које је тачка  $B$ , а она друга је са супротне стране. Према томе, тачка  $M'$  постоји и јединствено је одређена.



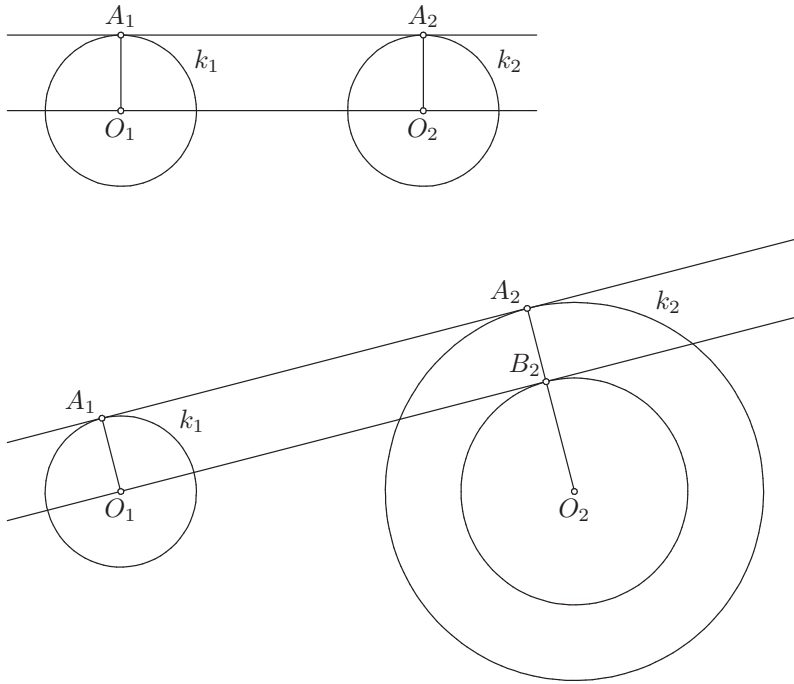
Нека је  $X$  тачка на кругу  $k$  таква да је  $XB$  тангента на кругу  $l$  у тачки  $B$ . Тада је  $\angle XBM$  угао између тангенте  $XB$  и тетиве  $BM$ , па је подударан периферијском углу  $\angle BCM$  над том тетивом. Троугао  $\triangle BCM$  је једнакокрак, па је  $\angle BCM = \angle CBM$ . Према томе,  $\angle XBM = \angle CBM = \angle A_1BM$ , па како је и  $\angle BXM = \frac{\pi}{2} = \angle BA_1M$  и

$BM$  је заједничка страница троуглова  $\triangle XBM$  и  $\triangle A_1BM$ , следи да су ти троуглови подударни. Према томе, важи  $MX = MA_1$ . Како важи да је  $MM' \leq \frac{1}{2}(\rho_b - \rho_c) < MA_1$ , следи да тачка  $M'$  припада краћем луку  $\widehat{MX}$  круга  $k$  (оном луку који не садржи тачку  $B$ ), па права  $BM$  сече круг  $l$  у тачки  $A$  таквој да је  $\mathcal{B}(B, A, M')$ , па и тачка  $A$  постоји и јединствено је одређена. Следи да решење постоји и јединствено је до на подударност.

Дакле, какве год да су дужи  $a, \rho_b, \rho_c$ , постоји јединствено решење до на подударност.

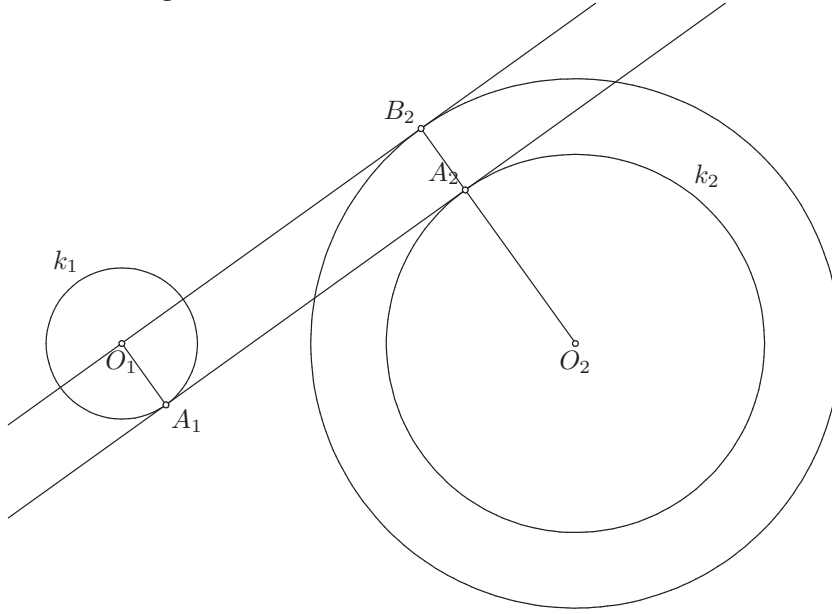
Пре следећег задатка, размотримо следећи проблем. Дати су кругови  $k_1(O_1, r_1)$  и  $k_2(O_2, r_2)$ . Конструисати њихове заједничке тангенте (спољашње и унутрашње).

**Анализа.** Нека је права  $p$  заједничка спољашња, а  $q$  заједничка унутрашња тангента кругова  $k_1$  и  $k_2$ . Тада права  $p$  додирује кругове  $k_1$  и  $k_2$  и важи  $k_1, k_2 \div p$ , а права  $q$  додирује кругове  $k_1$  и  $k_2$  и важи  $k_1, k_2 \div q$ .



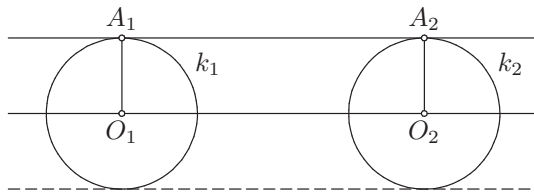
Нека су  $A_1, A_2$  редом додирне тачке праве  $p$  и кругова  $k_1, k_2$ . Тада је  $O_1A_1 \perp p$  и  $O_2A_2 \perp p$ , па важи  $O_1A_1 \parallel O_2A_2$ . Ако је  $r_1 = r_2$ , тада је права  $p$  паралелна са правом  $O_1O_2$  и налази се на растојању  $r_1 (= r_2)$  од ње. Претпоставимо без умањења општости да је  $r_1 < r_2$ . Нека је права  $p'$  паралелна са правом  $p$  и садржи тачку  $O_1$  и нека је  $B_2$  пресечна тачке правих  $p'$  и  $O_2A_2$ . Тада је  $O_2B_2 \perp p'$  и важи  $\mathcal{B}(O_2, B_2, A_2)$ . Четвороугао  $O_1B_2A_2A_1$  је паралелограм (јер је  $O_1B_2 \parallel A_1A_2$  и  $O_1A_1 \parallel B_2A_2$ ), па следи

да је  $A_2B_2 = O_1A_1 = r_1$ . Према томе,  $O_2B_2 = O_2A_2 - A_2B_2 = r_2 - r_1$ , па ако посматрамо круг  $k'_2(O_2, r_2 - r_1)$ , следи да је  $p'$  тангента на том кругу из тачке  $O_1$ .

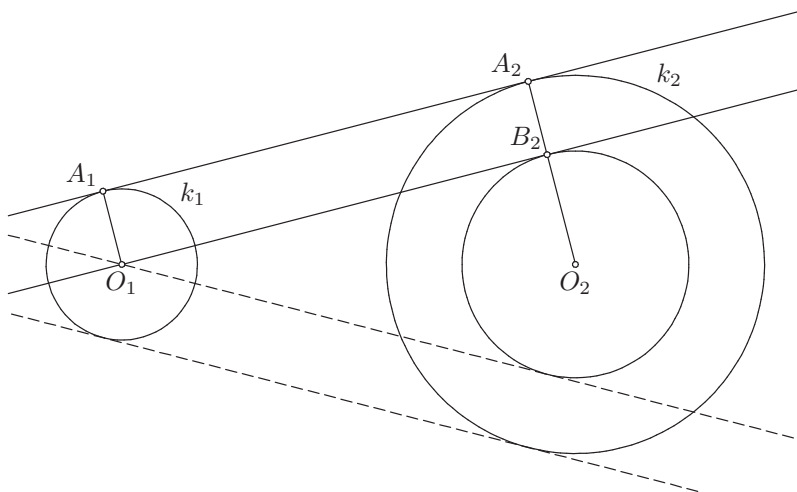


Слично, нека су  $C_1, C_2$  редом додирне тачке праве  $q$  и кругова  $k_1, k_2$ . Тада је  $O_1C_1 \perp q$  и  $O_2C_2 \perp q$ , па важи  $O_1C_1 \parallel O_2C_2$ . Нека је права  $q'$  паралелна са правом  $q$  и садржи тачку  $O_1$  и нека је  $D_2$  пресечна тачка правих  $q'$  и  $O_2C_2$ . Тада је  $O_2D_2 \perp q'$  и важи  $\mathcal{B}(O_2, C_2, D_2)$ . Четвороугао  $O_1D_2C_2C_1$  је паралелограм (јер је  $O_1D_2 \parallel C_1C_2$  и  $O_1C_1 \parallel D_2C_2$ ), па следи да је  $C_2D_2 = O_1C_1 = r_1$ . Према томе,  $O_2D_2 = O_2C_2 + C_2D_2 = r_2 + r_1$ , па ако посматрамо круг  $k''_2(O_2, r_2 + r_1)$ , следи да је  $q'$  тангента на том кругу из тачке  $O_1$ .

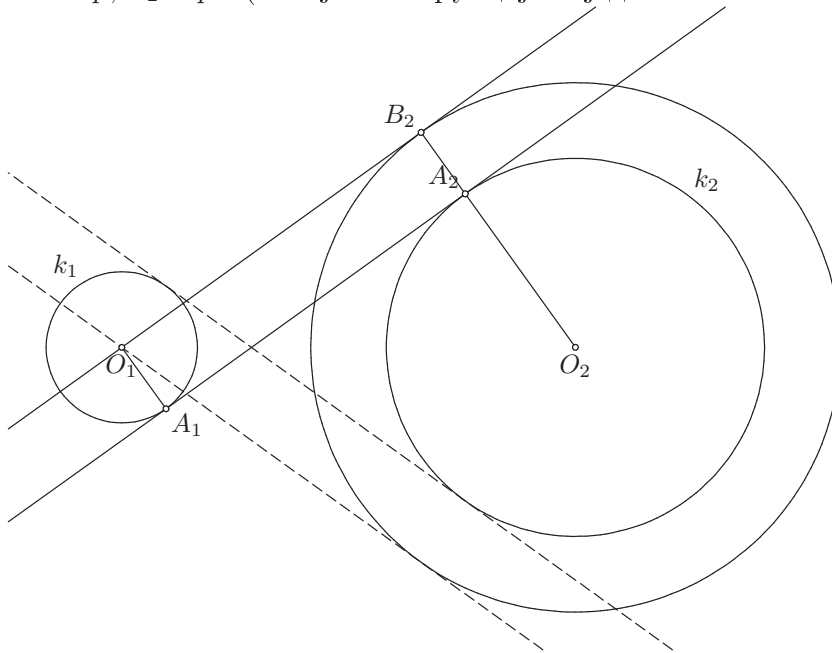
### Конструкција.



Ако је  $r_1 = r_2$ , конструишимо праву  $p$  која је паралелна са правом  $O_1O_2$  и налази се на растојању  $r_1(=r_2)$  од ње.



Без умањења општости претпоставимо да је  $r_1 < r_2$  (ако није, тј. ако је  $r_1 > r_2$ , означимо тачку  $O_1$  са  $O_2$  и обратно, круг  $k_1$  са  $k_2$  и обратно и полупречник  $r_1$  са  $r_2$  и обратно). Конструирамо круг  $k'_2(O_2, r_2 - r_1)$ . Конструирамо тангенту  $p'$  из тачке  $O_1$  на круг  $k'_2$  и конструирамо праву  $p$  која је паралелна са правом  $p'$ , налази се на растојању  $r_1$  од ње и за коју важи  $p, O_2 \div p'$ . (Ово је конструкција заједничке спољашње тангенте.)



Конструирамо круг  $k''_2(O_2, r_2 + r_1)$ . Конструирамо тангенту  $q'$  из тачке  $O_1$  на круг  $k''_2$  и конструирамо праву  $q$  која је паралелна са правом  $q'$ , налази се на растојању  $r_1$  од ње и за коју важи  $q, O_2 \div q'$ . (Ово је конструкција заједничке унутрашње тангенте.)

**Доказ.** Треба доказати да праве  $p, q$  додирују кругове  $k_1, k_2$  и да важи  $k_1, k_2 \dot{\div} p$  и  $k_1, k_2 \dot{\div} q$ .

Ако је  $r_1 = r_2$ , нека су  $n_1, n_2$  редом нормале на правој  $O_1O_2$  у тачкама  $O_1, O_2$  и означимо са  $A_1, A_2$  редом њихове пресечне тачке са правом  $p'$ . Тада је  $O_1A_1 \perp p$  и  $O_2A_2 \perp p$ , па како је права  $p$  на растојању  $r_1 (= r_2)$  од праве  $O_1O_2$ , следи да је  $O_1A_1 = O_2A_2 = r_1 = r_2$ . Према томе, тачка  $A_1$  припада кругу  $k_1$ , тачка  $A_2$  припада кругу  $k_2$  и права  $p$  је нормална на полупречницима  $O_1A_1, O_2A_2$  кругова  $r_1, r_2$ , па следи да је она тангента на круговима  $k_1, k_2$  редом у тачкама  $A_1, A_2$ . Како важи  $O_1, O_2 \dot{\div} p$ , следи и  $k_1, k_2 \dot{\div} p$ , па је  $p$  заједничка спољашња тангента кругова  $k_1, k_2$ .

Нека је без умањења општости  $r_1 < r_2$ . Нека је  $n$  нормала на правој  $p'$  у тачки  $O_1$ . Означимо са  $A_1$  њену пресечну тачку с правом  $p$ . Како је  $p$  паралелна са  $p'$ , следи да је  $O_1A_1 \perp p$ , а како се налази на растојању  $r_1$  од праве  $p'$  и како важи  $O_1 \in p'$  и  $A_1 \in p$ , следи да је  $O_1A_1 = r_1$ . Према томе, тачка  $A_1$  праве  $p$  припада кругу  $k_1$  и права  $p$  је нормална на полупречнику  $O_1A_1$  круга  $k_1$ , па следи да је права  $p$  тангента на кругу  $k_1$ . Даље, права  $p'$  је тангента на кругу  $k'_2$  и означимо са  $B_2$  њихову додирну тачку. Тада је  $p' \perp O_2B_2$ . Означимо са  $A_2$  пресечну тачку правих  $p$  и  $O_2B_2$ . Како је права  $p$  на растојању  $r_1$  од праве  $p'$ , следи да је  $A_2B_2 = r_1$ . Такође, како важи  $p, O_2 \dot{\div} p'$ , следи да важи  $\mathcal{B}(O_2, B_2, A_2)$ , па је  $O_2A_2 = O_2B_2 + B_2A_2 = r_2 - r_1 + r_1 = r_2$ , па тачка  $A_2$  припада кругу  $k_2$ . Дакле, права  $p$  је нормална на полупречнику  $O_2A_2$  круга  $k_2$ , па је она тангента на том кругу у тачки  $A_2$ . Из  $p, O_2 \dot{\div} p'$  следи да важи  $p', O_2 \dot{\div} p$ , па због  $O_1 \in p'$  следи да важи  $O_1, O_2 \dot{\div} p$ , што значи да важи и  $k_1, k_2 \dot{\div} p$ . Према томе,  $p$  јесте заједничка спољашња тангента кругова  $k_1, k_2$ .

Нека је  $n$  нормала на правој  $q'$  у тачки  $O_1$ . Означимо са  $C_1$  њену пресечну тачку с правом  $q$ . Како је  $q \parallel q'$ , следи да је  $O_1C_1 \perp q$ , а како се налази на растојању  $r_1$  од праве  $q'$  и како важи  $O_1 \in q'$  и  $C_1 \in q$ , следи да је  $O_1C_1 = r_1$ . Према томе, тачка  $C_1$  праве  $q$  припада кругу  $k_1$  и права  $q$  је нормална на полупречнику  $O_1C_1$  круга  $k_1$ , па следи да је права  $q$  тангента на кругу  $k_1$ . Даље, права  $q'$  је тангента на кругу  $k''_2$  и означимо са  $D_2$  њихову додирну тачку. Тада је  $q' \perp O_2D_2$ . Означимо са  $C_2$  пресечну тачку правих  $q$  и  $O_2D_2$ . Како је права  $q$  на растојању  $r_1$  од праве  $q'$ , следи да је  $C_2D_2 = r_1$ . Такође, како важи  $q, O_2 \dot{\div} q'$ , следи да важи  $\mathcal{B}(O_2, C_2, D_2)$ , па је  $O_2C_2 = O_2D_2 - C_2D_2 = r_2 + r_1 - r_1 = r_2$ , па тачка  $C_2$  припада кругу  $k_2$ . Дакле, права  $q$  је нормална на полупречнику  $O_2C_2$  круга  $k_2$ , па је она тангента на том кругу у тачки  $C_2$ . Из  $q, O_2 \dot{\div} q'$  следи да важи  $q', O_2 \dot{\div} q$ , па због  $O_1 \in q'$  следи да важи  $O_1, O_2 \dot{\div} q$ , што значи да важи и  $k_1, k_2 \dot{\div} q$ . Према томе,  $q$  јесте заједничка унутрашња тангента кругова  $k_1, k_2$ .

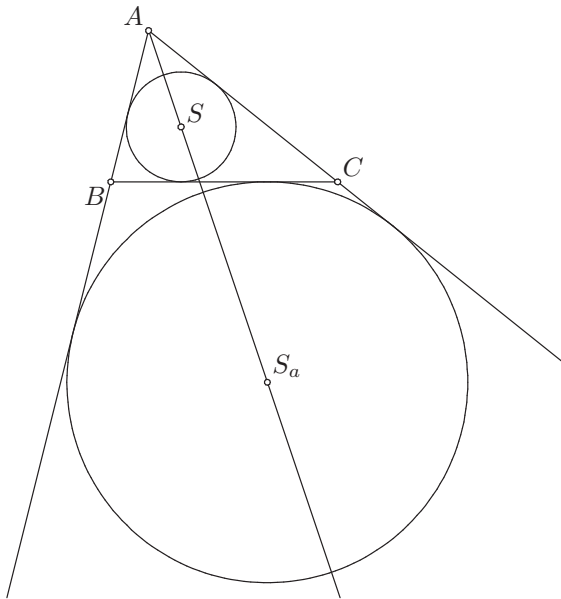
**Дискусија.** Ако је  $r_1 = r_2$  и  $O_1 \neq O_2$ , онда постоје тачно две праве  $p$  које су паралелне са  $O_1O_2$  и налазе се на растојању  $r_1 (= r_2)$  од ње, па постоје тачно две заједничке спољашње тангенте кругова  $k_1, k_2$ . Ако је  $r_1 = r_2$  и  $O_1 = O_2$ , онда се кругови  $k_1$  и  $k_2$  поклапају, па је свака тангента на кругу  $k_1$  уједно и тангента на кругу  $k_2$  и важи кругови  $k_1, k_2$  се налазе са исте стране те тангенте, што значи да задатак има бесконачно много решења.

Нека је без умањења општости  $r_1 < r_2$ . Да би постојала тангента из тачке  $O_1$  на кругу  $k_2'(O_2, r_2 - r_1)$ , тачка  $O_1$  мора бити или на кругу  $k_2$  или у његовој спољашњости, тј. мора важити  $O_1O_2 \geq r_2 - r_1$ . Ако је  $O_1O_2 = r_2 - r_1$ , тада постоји јединствена тангента  $p'$ , па постоји и јединствена права  $p$  која је паралелна са  $p'$ , налази се на растојању  $r_1$  од ње и за коју важи  $p, O_2 \div p'$ . Дакле, тада постоји јединствено решење. Ако је  $O_1O_2 > r_2 - r_1$ , онда постоје две тангенте  $p'$ , па постоје и две праве  $p$ . Дакле, у том случају постоје два решења.

Да би постојала тангента  $q'$  из тачке  $O_1$  на кругу  $k_2''$ , она се мора налазити на кругу  $k_2''$  или у његовој спољашњости. Дакле, мора важити  $O_1O_2 \geq r_2 + r_1$ . Ако је  $O_1O_2 = r_2 + r_1$ , онда постоји јединствена тангента  $q'$ , па постоји и јединствена права  $q$  која је паралелна са правом  $q'$ , налази се на растојању  $r_1$  од ње и за коју важи  $q, O_2 \div q'$ , па задатак има јединствено решење. Ако је  $O_1O_2 > r_2 + r_1$ , онда постоје две тангенте  $q'$ , па постоје и две праве  $q$ . Дакле, у том случају постоје два решења.

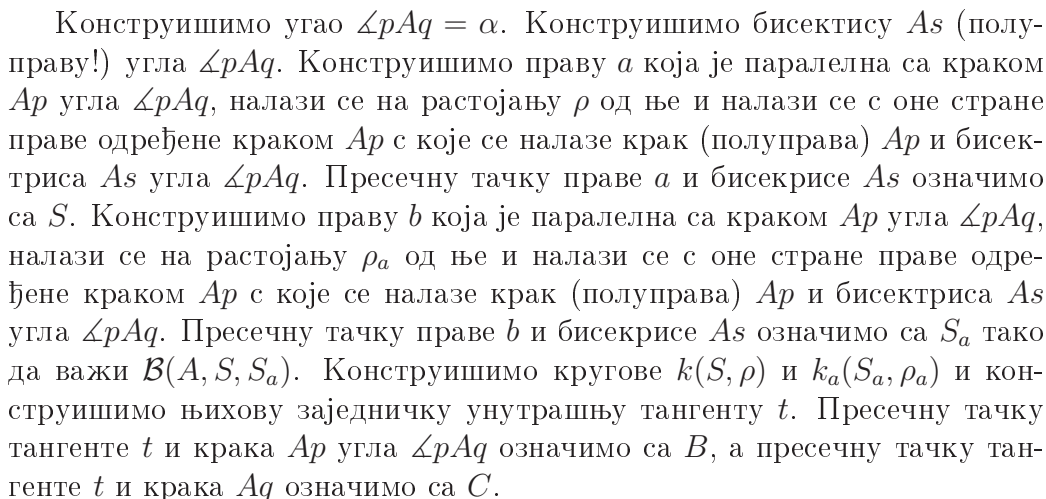
#### 10) $\alpha, \rho, \rho_a$

**Анализа.** Нека је  $\triangle ABC$  троугао који испуњава услове задатка. Тада је  $\angle BAC = \alpha$ , полупречник уписаног круга је подударан дужи  $\rho$  и полупречник споља уписаног круга који додирује страницу  $BC$  је подударан дужи  $\rho_a$ .



Нека су  $S, S_a$  редом центар уписаног круга  $k$  и центар споља уписаног круга  $k_a$  који додирује страницу  $BC$  и нека су  $R, R_a$  подножја нормала из тачака  $S, S_a$  на правој  $AB$ . Тачке  $S, S_a$  припадају бисектриси угла  $\angle BAC$  (полуправој!), а како су  $R, R_a$  редом додирне тачке кругова  $k, k_a$  и праве  $AB$ , следи да је  $SR = \rho$  и  $S_a R_a = \rho_a$ . Према томе, тачка  $S$  се налази на растојању  $\rho$  од праве  $AB$ , а тачка  $S_a$  се налази на растојању  $\rho_a$  од праве  $AB$ . Права  $BC$  је заједничка тангента кругова  $k, k_a$ , а како важи  $k, k_a \div BC$ , у питању је заједничка унутрашња тангента тих кругова.

**Конструкција.**



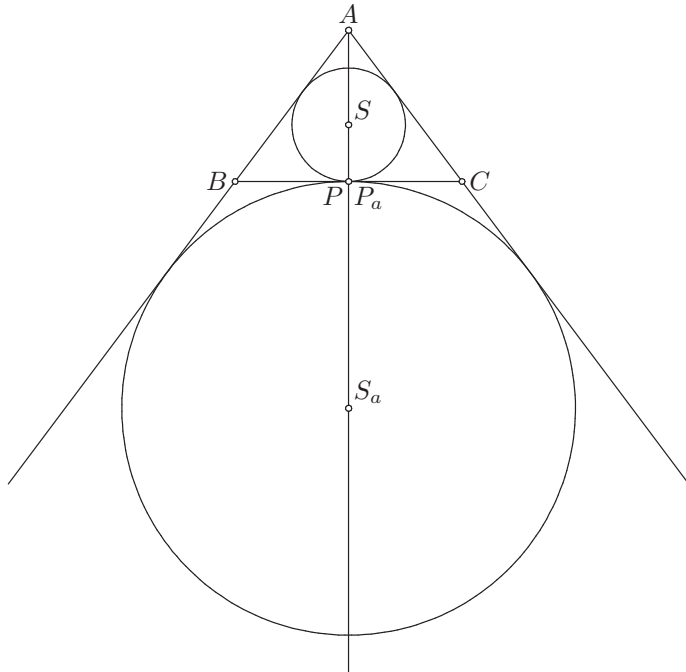
ПК тачка  $B$  припада краку  $Ap$ , а тачка  $C$  краку  $Aq$  угла  $\angle pAq$  који је ПК подударан углу  $\alpha$ , па следи да је  $\angle BAC = \angle pAq = \alpha$ .

112

кругова уписани, а други споља уписани круг који додирује страницу  $BC$  троугла  $\triangle ABC$ . С обзиром на то да ПК важи  $\mathcal{B}(A, S, S_a)$ , следи да је  $k(S, \rho)$  уписани, а  $k_a(S_a, \rho_a)$  споља уписани круг који додирује страницу  $BC$ . Коначно следи и да је полупречник уписаног круга троугла  $\triangle ABC$  подударан дужи  $\rho$  и да је полупречник споља уписаног круга који додирује страницу  $BC$  подударан дужи  $\rho_a$ .

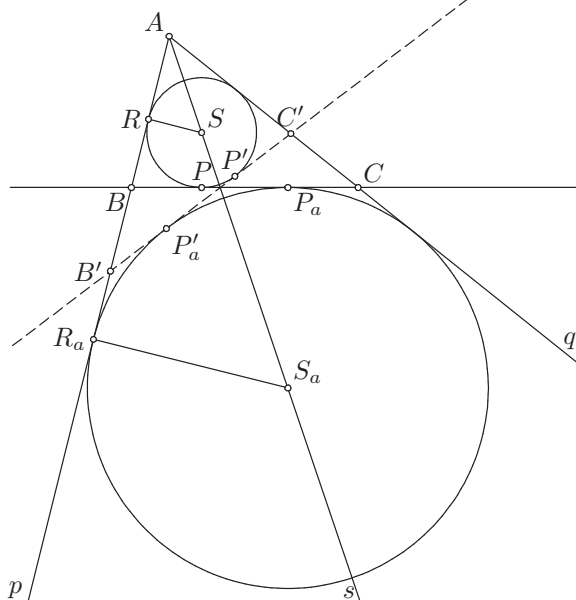
**Дискусија.** Ако је  $\alpha \geq \pi$ , не постоји троугао  $\triangle ABC$  чији је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

Нека су  $R, R_a$  подножја нормала из тачака  $S, S_a$  редом на краку  $Ap$ . Тада према Талесовој теореме следи  $\frac{AS}{AS_a} = \frac{SR}{S_aR_a}$ , а како се тачке  $S, S_a$  налазе редом на растојањима  $\rho, \rho_a$  од крака  $Ap$ , следи да је  $SR = \rho$  и  $S_aR_a = \rho_a$ , па је  $\frac{AS}{AS_a} = \frac{\rho}{\rho_a}$ . Да би важио распоред тачака  $\mathcal{B}(A, S, S_a)$ , мора важити  $AS < AS_a$ , тј.  $\frac{AS}{AS_a} < 1$ , а то важи ако и само ако важи  $\frac{\rho}{\rho_a} < 1$ , тј.  $\rho < \rho_a$ . На основу Дискусије о заједничким тангентама следи да кругови  $k, k_a$  имају заједничких унутрашњих тангенти ако и само ако важи  $SS_a \geq \rho + \rho_a$ . Из правоуглих троуглова  $\triangle ASR$  и  $\triangle AS_aR_a$  добијамо да је  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \angle RAS = \frac{RS}{AS}$  и  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \angle R_aAS_a = \frac{R_aS_a}{AS_a}$ , па важи  $AS = \frac{RS}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho}{\sin \frac{\alpha}{2}}$  и  $AS_a = \frac{R_aS_a}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho_a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ . Према томе, важи  $SS_a = AS_a - AS = \frac{\rho_a}{\sin \frac{\alpha}{2}} - \frac{\rho}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\rho_a - \rho}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ , па је  $\frac{\rho_a - \rho}{\sin \frac{\alpha}{2}} \geq \rho + \rho_a$  услов постојања заједничке унутрашње тангенте.



У конструкцији је пресечна тачка заједничке унутрашње тангенте и крака  $Ap$  означена са  $B$ , а пресечна тачка те тангенте и крака  $Aq$  је

означена са  $C$ . Ту смо имали могућност да одаберемо која ће се тачка означити са  $B$  а која са  $C$ , па морамо испитати да ли се обрнутим означавањем добијају неподударна решења. Ако важи  $\frac{\rho_a - \rho}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \rho + \rho_a$ , онда се кругови  $k, k_a$  додирују и постоји јединствена заједничка унутрашња тангента кругова  $k, k_a$ . Уписани круг додирује страницу  $BC$  у тачки  $P$ , а споља уписани круг троугла који додирује страницу  $BC$  додирује ту страницу у тачки  $P_a$  и на основу Великог задатка је средиште  $A_1$  странице  $BC$  уједно и средиште дужи  $PP_a$ . Следи да се ти кругови додирују ако и само ако се тачке  $P, P_a, A_1$  поклапају, тј. ако и само ако је троугао  $\triangle ABC$  једнакокраки код којег важи  $AB = AC$ . Следи да у овом случају промена ознака теменима  $B, C$  даје подударна решења.



Ако је  $\frac{\rho_a - \rho}{\sin \frac{\alpha}{2}} > \rho + \rho_a$ , онда се кругови  $k, k_a$  не додирују и имају две разне заједничке тангенте. Размотримо за почетак једну од тих тангенти. Како се кругови  $k, k_a$  не додирују, следи да при једном избору ознака темена  $B, C$  важи распоред тачака  $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ , а при другом важи распоред тачака  $\mathcal{B}(C, P, P_a, B)$ . У првом случају је  $AB < AC$ , а у другом  $AC < AB$ , па промена ознака даје неподударна решења. Узмимо сада у обзир и другу тангенту. Ту такође добијамо два неподударна решења. Све што још треба проверити јесте да ли су сва четири добијена решења међусобно неподударна. Сада следи доказ да нису сва четири троугла међусобно неподударна, већ да имамо два пара подударних троуглова, тј. да задатак има два неподударна решења. Тај доказ је за сада мало несрећно објашњен, па није страшно ако га не разумете.

Сваком од четири добијена троугла су подударне тангентне дужи чије

је једно теме тачка  $A$ , а друго додирна тачка круга  $k_a$  и крака  $Ap$  угла  $\angle PAQ = \angle BAC$  (у Доказу означена са  $R_a$ ), а та дуж ( $AR_a$ ) је на основу тврђења **2)** Великог задатка подударна полуобиму одговарајућег троугла  $\triangle ABC$ . Дакле, сва четири добијена троугла имају подударне полубиме, па имају и подударне обиме. Такође, сваком од тих троуглова су подударне тангентне дужи чије је једно теме тачка  $A$ , а друго додирна тачка круга  $k$  и крака  $Ap$  (у Доказу означена са  $R$ ), а та дуж ( $AR$ ) је на основу тврђења **3)** Великог задатка подударна разлици полубима и странице  $BC$  одговарајућег троугла  $\triangle ABC$ . Како су полубимови сва четири троугла међусобно подударни, следи да су подударне и све странице  $BC$ . Такође, како су још и обимови подударни, подударни су и зборови страница  $AB$  и  $AC$ . Из решења проблема о заједничким тангентама видимо да су за два круга међусобно подударне дуж чија су темена додирне тачке једне заједничке унутрашње тангенте и тих кругова и дуж чија су темена додирне тачке друге заједничке унутрашње тангенте и тих кругова. Ако користимо ознаке  $P, P_a$  из Доказа за додирне тачке заједничке унутрашње тангенте  $BC$  и кругова  $k, k_a$ , следи да су дужи  $PP_a$  одговарајућих троуглова међусобно подударне. У зависности од тога да ли важи распоред  $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$  или  $\mathcal{B}(C, P, P_a, B)$ , дуж  $PP_a$  је подударна разлици  $AC - AB$  или  $AB - AC$ . Међутим, подударни су и зборови тих страница, па следи да су код оног пара троуглова код којих је  $AB < AC$  подударне одговарајуће дужи  $AB, AC$ , па су и они међусобно подударни и да су код оног пара троуглова код којих је  $AB > AC$  подударне одговарајуће дужи  $AB, AC$ , па су и они међусобно подударни. Дакле, међу четирима добијеним троугловима имамо два пара међусобно подударних троуглова таквих да троуглови узети из различитих парова нису међусобно подударни, па постоје два неподударна решења.

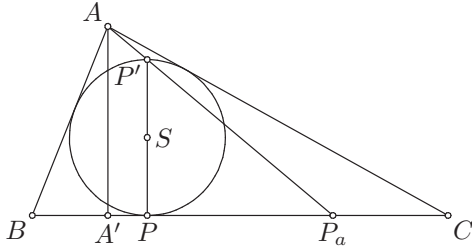
На слици се ово много боље види. Ако у троуглу  $\triangle ABC$  заменимо ознаке теменима  $B, C$ , добијамо троугао који није подударан полазном троуглу, али јесте подударан троуглу  $\triangle AB'C'$  са слике. Такође, ако у троуглу  $\triangle AB'C'$  заменимо ознаке теменима  $B', C'$ , добијамо троугао који није подударан полазном троуглу, али јесте подударан троуглу  $\triangle ABC$  са слике. Наравно, троуглови  $\triangle ABC$  и  $\triangle A'B'C'$  нису подударни, па задатак има два неподударна решења.

Закључак је следећи. Ако је  $\alpha < \pi$ ,  $\rho < \rho_a$  и  $\frac{\rho_a - \rho}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \rho + \rho_a$ , онда постоји јединствено решење до на подударност. Ако је  $\alpha < \pi$ ,  $\rho < \rho_a$  и  $\frac{\rho_a - \rho}{\sin \frac{\alpha}{2}} > \rho + \rho_a$ , онда постоје два неподударна решења. У осталим случајевима, задатак нема решења.

**11)**  $b - c, h_a, \rho$

**Анализа.** Нека је  $\triangle ABC$  троугао који испуњава услове задатка. Нека

је  $A'$  подножје висине из темена  $A$ ,  $S$  центар уписаног круга и  $P$  додирна тачка уписаног круга и стрнице  $BC$ . Тада важи  $AB < AC$  и  $AC - AB = b - c$ ,  $AA' = h_a$  и  $SP = \rho$ .



Нека су  $P', P_a$  тачке из Великог задатка. На основу Великог задатка важи  $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ ,  $PP_a = b - c$  и тачке  $A, P', P_a$  су колинеарне. Тачка  $S$  је средиште дужи  $P'P$ , па је  $P'P = P'S + SP = 2SP = 2\rho$ . У троуглу  $\triangle P'PP_a$  је  $P'P = 2\rho$ ,  $\angle P'PP_a = \frac{\pi}{2}$  и  $PP_a = b - c$ , па тај троугао унемо да конструишемо. Тачка  $A$  припада правој  $P'P_a$  и налази се на растојању  $h_a$  од праве  $BC$ , тј. од праве  $PP_a$ . Тачке  $B, C$  припадају тангентама из тачке  $A$  на уписаном кругу  $k(S, SP)$  и правој  $PP_a$  тако да важи распоред  $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ .

**Конструкција.** Конструиримо троугао  $\triangle P'PP_a$  такав да је  $P'P = 2\rho$ ,  $\angle P'PP_a = \frac{\pi}{2}$  и  $PP_a = b - c$ . Означимо са  $S$  средиште дужи  $P'P$  и конструиримо круг  $k(S, SP)$ . Конструиримо праву  $p$  која је паралелна са правом  $PP_a$  и налази се на растојању  $h_a$  такву да важи  $p, S, P' \div PP_a$ . У пресеку правих  $p$  и  $P'P_a$  означимо тачку  $A$  тако да важи  $\mathcal{B}(A, P', P_a)$ . Конструиримо тангенте из тачке  $A$  на кругу  $k$ . У пресеку тих тангенти и праве  $PP_a$  означимо тачке  $B, C$  тако да важи  $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ .

**Доказ.** Тачка  $S$  је средиште дужи  $P'P$  која је ПК подударна дужи  $2\rho$ , па следи да је  $SP = \frac{1}{2}P'P = \frac{1}{2}2\rho = \rho$ . Како је по конструкцији  $P'P \perp PP_a$ , следи да је права  $PP_a$  нормална на полупречнику  $SP$  круга  $k(S, SP)$ , па је она тангента на кругу  $k$  у тачки  $P$ . ПК важи  $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ , па праву  $PP_a$  можемо означавати и са  $BC$ . Дакле, права  $BC$  је тангента на кругу  $k$  и додирује је у тачки  $P$  која ПК припада дужи  $BC$ . Такође, праве  $AB, AC$  су ПК тангенте на кругу  $k$ , па следи да је круг  $k$  или уписани круг или споља уписани круг који додирује страницу  $BC$  троугла  $\triangle ABC$ . Како ПК важи  $A, S \ddot{=} PP_a$ , тј.  $A, S \ddot{=} BC$ , следи да је у питању уписани круг, па је његов полупречник подударан дужи  $\rho$ .

Дакле,  $P$  је додирна тачка уписаног круга и странице  $BC$ , а како је ПК тачка  $S$  средиште дужи  $P'P$ , следи да је  $P'$  тачка из Великог задатка. Како додирна тачка странице  $BC$  и одговарајућег споља уписаног круга троугла  $\triangle ABC$  припада правој  $AP'$ , а ПК тачка  $P_a$  припада правој  $AP'$  и страници  $BC$ , следи да је  $P_a$  додирна тачка странице  $BC$  и одговарајућег

споља уписаног круга. Из распореда  $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$  на основу Великог задатка следи да је  $AB < AC$  и да је  $PP_a = AC - AB$ , а како ПК имамо  $PP_a = b - c$ , следи да је  $AC - AB = b - c$ .

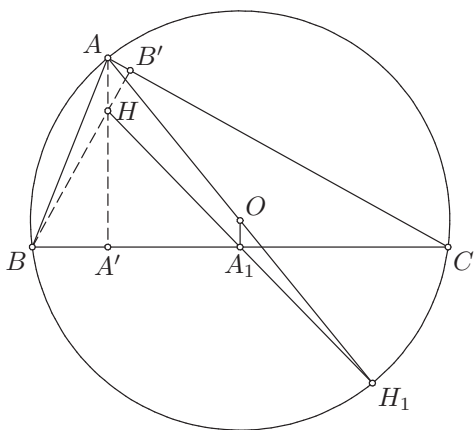
Тачка  $A$  припада правој  $p$  која је паралелна са правом  $PP_a$ , тј. правом  $BC$  и налази се на растојању  $h_a$  од ње, па ако означимо са  $A'$  подножје висине из темена  $A$  троугла  $\triangle ABC$ , следи да је  $AA' = h_a$ .

**Дискусија.** Да би важио услов  $\mathcal{B}(A, P', P_a)$ , мора бити  $h_a > 2\rho$ , јер праве које су паралелне са  $PP_a$  и налазе се на растојању мањем од  $2\rho$  секу дуж  $P_aP'$ , а права која се налази на растојању  $2\rho$  сече праву  $P_aP'$  у тачки  $P'$ . Овим смо осигурали и да тачка  $A$  припада спољашњости круга  $k(S, SP)$ , јер права  $p$  (која је паралелна са  $PP_a$  и налази се на растојању  $h_a (> 2\rho)$  од ње) нема заједничких тачака са кругом  $k$ , па постоје две тангенте из тачке  $A$  на круг  $k$ . Обезбедивши распоред тачака  $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ , обезбедили смо да ће те тангенте сећи праву  $PP_a$  тако да се тачке  $P, P_a$  нађу између тих пресечних тачака, па услов  $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$  служи само томе да се јединствено одреди која је од тих пресечних тачака тачка  $B$ , а која је тачка  $C$ , а потребан је да би важило  $AB < AC$ .

Дакле, ако важи  $h_a > 2\rho$ , постоји јединствено решење до на подударност, а ако важи  $h_a \leq 2\rho$ , задатак нема решења.

## 2. $A, H, O$

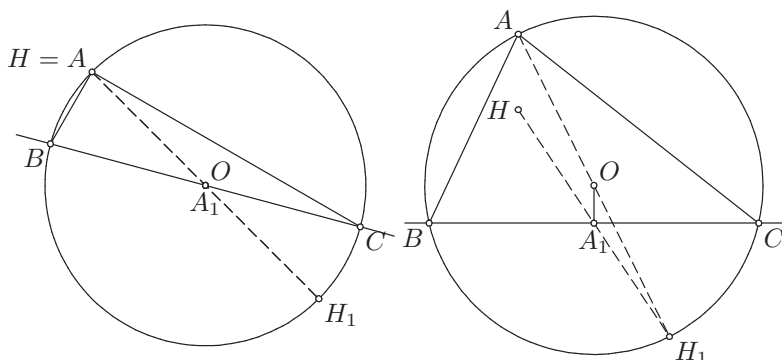
**Анализа.** Нека је  $\triangle ABC$  троугао који испуњава услове задатка, тј. нека се његово теме  $A$  поклапа с датом тачком  $A$ , нека се његов ортоцентар поклапа с датом тачком  $H$  и нека се центар његовог описаног круга поклапа са тачком  $O$ .



Нека је  $A_1$  средиште стране  $BC$  троугла  $\triangle ABC$  и нека је  $H_1$  тачка симетрична ортоцентру  $H$  у односу на тачку  $A_1$ . У 3. задатку из области Подударност смо доказали да је тада тачка  $H_1$  симетрична темену  $A$  у

односу на центар  $O$  описаног круга троугла  $\triangle ABC$ . Приметимо да ако се тачке  $A, H$  поклапају, тј. ако је  $\triangle ABC$  правоугли с правим углом код темена  $A$ , онда се поклапају и тачке  $O, A_1$  јер се центар описаног круга налази на средишту хипотенузе  $BC$ , а ако се тачке  $A, H$  разликују, онда се разликују и тачке  $O, A_1$  и имамо да је права  $BC$  нормална на правој  $OA_1$  у тачки  $A_1$ .

### Конструкција.



Означимо са  $H_1$  тачку симетричну тачки  $A$  у односу на тачку  $O$ , а затим са  $A_1$  средиште дужи  $HH_1$ . Конструирамо круг  $l(O, OA)$ . Ако се тачке  $O, A_1$  поклапају, онда конструирамо произвољну праву  $p$  која садржи  $O$  и различита је од праве  $OA$  и означимо са  $B, C$  пресечне тачке те праве и круга  $l$ , а ако се тачке  $O, A_1$  разликују, онда конструирамо праву  $p$  која је нормална на  $OA_1$  у тачки  $A_1$  и не садржи тачку  $A$  и означимо са  $B, C$  пресечне тачке те праве и круга  $l$ .

**Доказ.** ПК се тачке  $B, C$  разликују и припадају правој  $p$  која не садржи тачку  $A$ , па су  $A, B, C$  три неколинеарне тачке. Такође, оне ПК припадају кругу  $l$ , па је  $l$  описани круг троугла  $\triangle ABC$ , а како је  $O$  његов центар, следи да је  $O$  центар описаног круга троугла  $\triangle ABC$ .

Из претходног закључка следи да је  $OB = OC$ . Ако се тачке  $O, A_1$  поклапају, онда тачка  $O$  припада страници  $BC$ , па због  $OB = OC$  закључујемо да је  $O$  (тј.  $A_1$ ) средиште странице  $BC$ . Ако се тачке  $O, A_1$  разликују, онда је по конструкцији  $OA_1 \perp BC$ , па како  $O$  припада симетрали странице  $BC$  (јер важи  $OB = OC$ ), следи да је  $OA_1$  симетрала странице  $BC$ . ПК тачка  $A_1$  припада страници  $BC$ , па следи да је она њено средиште. ПК је тачка  $H_1$  симетрична темену  $A$  у односу на центар описаног круга, а у 3. задатку из области Подударност доказали смо да је тачка симетрична ортоцентру у односу на средиште странице  $BC$  симетрична и темену  $A$  у односу на центар описаног круга троугла  $\triangle ABC$ . Следи да је тачка  $H_1$  симетрична ортоцентру у односу на средиште  $A_1$

дужи  $BC$ , а самим тим и да је ортоцентар симетричан тачки  $H_1$  у односу на тачку  $A_1$ . ПК је  $A_1$  средиште дужи  $HH_1$ , па следи да је тачка  $H$  симетрична тачки  $H_1$  у односу на средиште  $A_1$  странице  $BC$ , што значи да је тачка  $H$  ортоцентар троугла  $\triangle ABC$ .

**Дискусија.** Ако се тачке  $A, O$  поклапају, задатак нема решења, јер се темена сваког троугла разликују од центра његовог описаног круга (а тада такође не постоји круг  $l(O, OA)$ ). Нека су тачке  $A, O$  различите. Морамо обезбедити да права  $p$  коју конструишемо кроз тачку  $A_1$  сече круг  $l$  у двема тачкама и да не садржи тачку  $A$ . Ако се тачке  $O, A_1$  поклапају, онда смо ту праву конструисали произвољно тако да се разликује од праве  $OA$ . Свака права која пролази кроз тачку  $O$  сече круг  $l$  у двема тачкама и само права  $OA$  садржи тачку  $A$ . Дакле, тада постоји бесконачно много решења.

Нека се тачке  $O, A_1$  разликују. Тачка  $O$  је средиште дужи  $AN_1$ , а тачка  $A_1$  је средиште дужи  $HH_1$ . Ако су тачке  $A, H, H_1$  неколинеарне (тј. ако постоји троугао  $\triangle ANH_1$ ), онда је  $OA_1$  његова средња линија и важи  $OA_1 \parallel AN$  и  $OA_1 = \frac{AN}{2}$ . Ако су тачке  $A, H, H_1$  колинеарне и припадају некој правој  $p$ , онда и тачке  $O, A_1$  припадају правој  $p$ . Докажимо да је и у овом случају  $OA_1 = \frac{AN}{2}$ , тј.  $AN = 2OA_1$ . Из чињеница да је  $O$  средиште дужи  $AN_1$  и  $A_1$  средиште дужи  $HH_1$  добијамо да важе распореди  $\mathcal{B}(A, O, H_1)$  и  $\mathcal{B}(H, A_1, H_1)$ , као и једнакости  $AO = OH_1$  и  $HA_1 = A_1H_1$ .

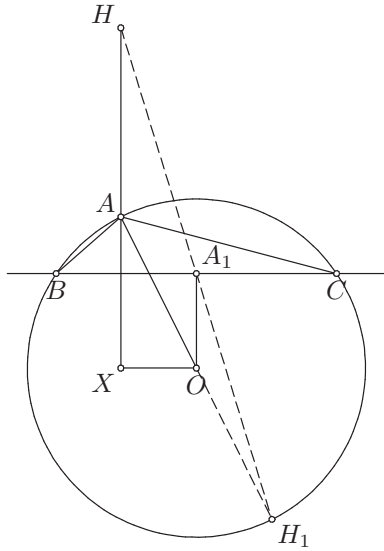
Нека важи распоред  $\mathcal{B}(A, O, H)$ . Тада је  $AN = AO + OH = OH_1 + OH$ . Ако важи  $\mathcal{B}(O, A_1, H_1)$ , онда добијамо  $OH_1 = OA_1 + A_1H_1 = OA_1 + HA_1$ , па је  $AN = OA_1 + HA_1 + OH$ . Добијамо и распоред  $\mathcal{B}(A, O, A_1, H_1)$ , што заједно са  $\mathcal{B}(H, A_1, H_1)$  коначно даје  $\mathcal{B}(A, O, H, A_1, H_1)$ . Следи да је  $OH + HA_1 = OA_1$ , па смо добили да је  $AN = OA_1 + OA_1 = 2OA_1$ . Ако се тачке  $A_1, H_1$  поклапају, онда се и тачка  $H$  поклапа с њима, па је  $AN = OH_1 + OH = OA_1 + OA_1 = 2OA_1$ . Ако важи  $\mathcal{B}(O, H_1, A_1)$ , онда добијамо распоред  $\mathcal{B}(A, O, H_1, A_1, H)$  и  $OH_1 = OA_1 - A_1H_1 = OA_1 - HA_1$ , па је  $AN = OA_1 - HA_1 + OH = OA_1 + OA_1 = 2OA_1$ .

Ако се тачке  $O, H$  поклапају, онда је  $AN = AO = OH_1 = HH_1 = 2HA_1 = 2OA_1$ .

Нека сада важи распоред  $\mathcal{B}(A, H, O)$ . Знамо да онда важи и распоред  $\mathcal{B}(A, H, O, H_1)$ , па је  $HH_1 < AH_1$ . Следи  $A_1H_1 = \frac{1}{2}HH_1 < \frac{1}{2}AH_1 = OH_1$ , тј. важи  $\mathcal{B}(O, A_1, H_1)$ . Дакле, добијамо распоред  $\mathcal{B}(A, H, O, A_1, H_1)$ , па следи да је  $AN = AO - OH = OH_1 - OH = OA_1 + A_1H_1 - OH = OA_1 + HA_1 - OH = OA_1 + OA_1 = 2OA_1$ .

Ако се тачке  $A, H$  поклапају, онда се поклапају и дужи  $AN_1$  и  $HH_1$ , па се поклапају и њихова средишта  $O, A_1$ , што је у супротности с претпоставком да се те две тачке разликују. Дакле,  $A, H$  се не поклапају.

Иначе, чињеницу да је  $AH = 2OA_1$  могли смо доказати и помоћу вектора, без обзира на то да ли су тачке  $A, H, H_1$  колинеарне или не. Наиме, из чињеница да су  $O, A_1$  средишта дужи  $AH_1, HH_1$  добијамо да је  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OH_1}$  и  $\overrightarrow{HA_1} = \overrightarrow{A_1H_1}$ , па имамо да је  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OH_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1H_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{HA_1} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_1} = 2\overrightarrow{OA_1}$ . Следи да је  $AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \|2\overrightarrow{OA_1}\| = 2\|\overrightarrow{OA_1}\| = 2OA_1$ .



120

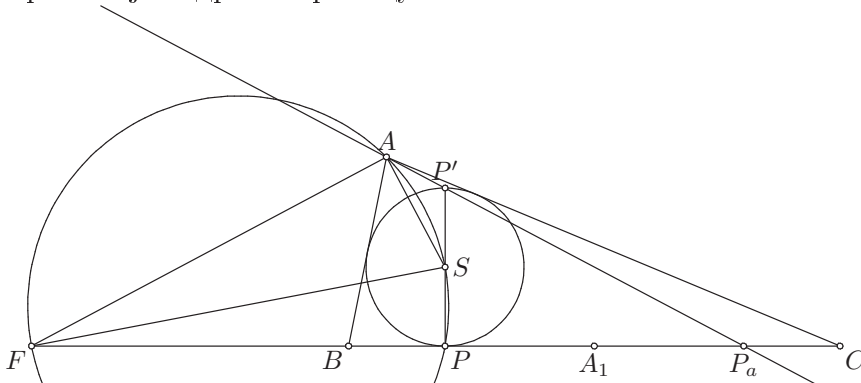
$$AO \cos(\pi - \angle HAO) = \frac{1}{2}AH.$$

Дакле, сад знамо када постоји решење. Што се јединствености тиче, важи следеће. Ако се тачке  $A, H$  поклапају, онда постоји бесконачно много решења. Ако се тачке  $A, H$  разликују и испуњени су остали услови за постојање праве  $p$  која не садржи тачку  $A$ , постоје два решења, јер имамо избор коју ћемо од пресечних тачака праве  $p$  и круга  $l$  обележити са  $B$ , а коју са  $C$ . Ако су тачке  $A, H, O$  колинеарне, онда је троугао  $\triangle ABC$  једнакократи с врхом  $A$ , па заменом ознака теменима  $B, C$  добијамо подударна решења, а ако тачке  $A, H, O$  нису колинеарне, онда заменом ознака теменима  $B, C$  не добијамо подударна решења.

Закључак је следећи. Ако се тачке  $O, A$  разликују, а тачке  $A, H$  поклапају, постоји бесконачно много решења. Ако се тачке  $O, A$  разликују, као и тачке  $A, H$ , ако су  $A, H, O$  колинеарне и важи  $AN < 2OA$ , постоје два међусобно подударна решења. Ако се тачке  $O, A$  и  $A, H$  разликују,  $A, H, O$  нису колинеарне, угао  $\angle HAO$  није туп и важи  $AN < 2OA$ , онда постоје два неподударна решења. Ако се тачке  $O, A$  и  $A, H$  разликују,  $A, H, O$  нису колинеарне, угао  $\angle HAO$  је туп, важи  $AN < 2OA$  и важи  $AO \cos(\pi - \angle HAO) \neq \frac{1}{2}AN$ , постоје два неподударна решења. У свим осталим случајевима, задатак нема решења.

### 3. $A_1, S, F$

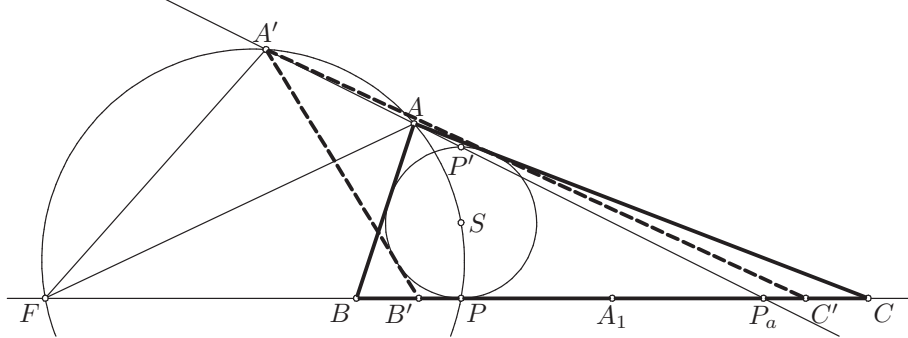
**Анализа.** Нека је  $\triangle ABC$  троугао који испуњава услове задатка, тј. нека је тачка  $A_1$  средиште странице  $BC$ , тачка  $S$  центар његовог уписаног круга и  $F$  пресечна тачка бисектрисе спољашњег угла код темена  $A$  и праве која садржи страницу  $BC$ .



Нека су  $P, P', P_a$  тачке из Великог задатка. Тачка  $P$  је подножје нормале из тачке  $S$  на страници  $BC$ , а самим тим и на правој  $FA_1$ . На основу Великог задатка је тачка  $P_a$  симетрична тачки  $P$  у односу на тачку  $A_1$ , а тачка  $P'$  јој је симетрична у односу на тачку  $S$ . Полуправа  $AS$  је бисектриса унутрашњег, а полуправа  $AF$  бисектриса спољашњег угла код темена  $A$ , што значи да је угао  $\angle FAS$  прав. Према томе, тачка

$A$  припада кругу над пречником  $FS$ . Такође, на основу Великог задатка важи  $\mathcal{B}(A, P', P_a)$ , па тачка  $A$  припада правој  $P_aP'$ . Следи да она припада пресеку круга над пречником  $FS$  и праве  $P_aP'$ . Праве  $AB$  и  $AC$  су тангенте на уписаном кругу  $k(S, SP)$  и тачке  $B, C$  припадају правој  $FA_1$ .

### Конструкција.



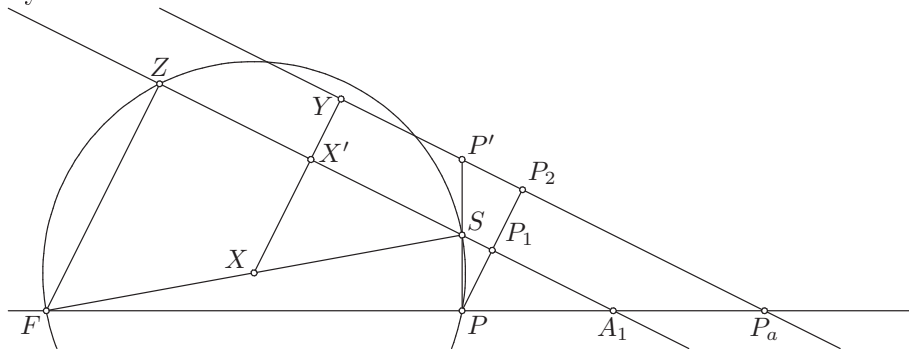
Конструишимо праву  $FA_1$ . Означимо подножје нормале из тачке  $S$  на правој  $FA_1$  са  $P$ , а затим тачке симетричне тачки  $P$  редом у односу на тачке  $A_1, S$  означимо са  $P_a, P'$ . Конструишимо круг над пречником  $FS$  и његов пресек с правом  $P_aP'$  означимо са  $A$  тако да важи  $\mathcal{B}(A, P', P_a)$ . Конструишимо тангенте из тачке  $A$  на кругу  $k(S, SP)$  и њихове пресеке с правом  $FA_1$  означимо са  $B, C$  тако да важи  $\mathcal{B}(B, P, C)$ .

**Доказ.** ПК је полупречник  $SP$  круга  $k(S, SP)$  нормалан на правој  $FA_1$ , тј. на правој  $BC$ , па следи да је права  $BC$  тангента на кругу  $k$ . Такође, праве  $AB$  и  $AC$  су ПК тангенте на кругу  $k$ , а како ПК важи  $\mathcal{B}(B, P, C)$ , следи да је  $k$  уписани круг или споља уписани круг који додирује страну  $BC$  троугла  $\triangle ABC$ . Пошто ПК важи  $\mathcal{B}(A, P', P_a)$ , следи  $A, P' \div BC$ , а пошто је  $S$  средиште  $PP'$ , следи  $\mathcal{B}(P, S, P')$ , па је  $P', S \div BC$ . Следи  $A, S \div BC$ , па је  $k$  уписани круг троугла  $\triangle ABC$ , што значи да је његов центар  $S$  центар уписаног круга троугла  $\triangle ABC$ .

Из чињеница да је тачка  $P$  додирна тачка уписаног круга и стране  $BC$ , ПК тачка  $P'$  симетрична тачки  $P$  у односу центар уписаног круга  $S$ ,  $\mathcal{B}(A, P', P_a)$  и да  $P_a$  припада правој  $BC$ , на основу Великог задатка следи да је тачка  $P_a$  додирна тачка споља уписаног круга и стране  $BC$ . Како је ПК тачка  $A_1$  средиште дужи  $PP_a$ , на основу великог задатка следи да је тачка  $A_1$  средиште дужи  $BC$ .

Пошто је  $S$  центар уписаног круга троугла  $\triangle ABC$ , следи да је полуправа  $AS$  бисектриса унутрашњег угла код темена  $A$ . ПК тачка  $A$  припада кругу над пречником  $FS$ , па је угао  $\angle FAS$  прав. Дакле, полуправа  $AF$  је бисектриса спољашњег угла, па како тачка  $F$  припада правој  $BC$ , следи да је она пресечна тачка бисектрисе спољашњег угла код темена  $A$  троугла  $\triangle ABC$  и праве која садржи страну  $BC$ .

Троугао  $\triangle FAS$  је правоугли с правим углом код темена  $A$ , па је угао  $\angle FSA$  оштар. Због  $\mathcal{B}(A, S, E)$  следи да је угао  $\angle FSE$  туп. Из  $\mathcal{B}(F, E, A_1)$  следи да је  $\angle FSA_1 > \angle FSE$ , па је и угао  $\angle FSA_1$  туп. Дакле, да би постојало решење, тачке  $F, A_1, S$  морају бити такве да је угао  $\angle FSA_1$  туп.



123

$X$  на правој  $P_aP'$ , следи да ће то бити тачно ако и само ако је  $XY \leq XS$ , јер је  $XS = \frac{1}{2}FS$  полупречник тог круга. Како је  $A_1$  средиште стране  $PP_a$ , а  $S$  средиште стране  $PP'$  троугла  $\triangle PP'P_a$ , следи да је  $A_1S$  средња линија тог троугла и  $A_1S \parallel P_aP'$ . Нека су  $Z, P_1$  редом подножја нормала из тачака  $F, P$  на правој  $A_1S$ . Како је  $XY \perp P_aP'$  и  $A_1S \parallel P_aP'$ , следи да је  $XY \perp A_1S$  у некој тачки  $X'$  таквој да важи  $\mathcal{B}(X, X', Y)$ . Дакле,  $XY = XX' + X'Y$ , па треба само још одредити дужи  $XX'$  и  $X'Y$ .

У правоуглом троуглу  $\triangle FSZ$  с правим углом код темена  $Z$  је  $X$  средиште хипотенузе  $FS$  и  $XX' \perp SZ$ , па како због  $FZ \perp SZ$  важи  $XX' \parallel FZ$ , следи да је  $XX'$  средња линија тог троугла. Према томе,  $XX' = \frac{1}{2}FZ$ . Угао  $\angle FSA_1$  је туп, а угао  $\angle FSZ$  мора бити оштар, па следи да је  $\angle FSZ$  спољашњи угао троугла  $\triangle FA_1S$ . Дакле, важи  $\angle FSZ = \pi - \angle FSA_1$ . Из троугла  $\triangle FSZ$  следи  $\sin \angle FSZ = \frac{FZ}{FS}$ , па је  $FZ = FS \sin \angle FSZ = FS \sin(\pi - \angle FSA_1)$ .

Дуж  $X'Y$  је у ствари растојање између паралелних правих  $A_1S$  и  $P_aP'$ , па ако продужимо  $PP_1$  до пресека с правом  $P_aP'$  и означимо га са  $P_2$ , следи  $X'Y = P_1P_2$ . Из Талесове теореме следи  $\frac{PS}{SP'} = \frac{PP_1}{P_1P_2}$ . Како је  $S$  средиште дужи  $PP'$ , важи  $PS = SP'$ , па следи и  $PP_1 = P_1P_2 = X'Y$ . Троугао  $\triangle SPA_1$  је правоугли с правим углом код темена  $P$ , па је  $\cos \angle PA_1S = \frac{PA_1}{A_1S}$ . Такође, троугао  $\triangle PA_1P_1$  је правоугли с правим углом код темена  $P_1$ , па је  $\sin \angle PA_1P_1 = \frac{PP_1}{PA_1}$ . Дакле,  $PP_1 = PA_1 \sin \angle PA_1P_1 = (A_1S \cos \angle PA_1S) \sin \angle PA_1P_1$ . Углови  $\angle PA_1P_1$  и  $\angle PA_1S$  су исти и то је у ствари угао  $\angle FA_1S$ . Дакле,  $PP_1 = A_1S \cos \angle FA_1S \sin \angle FA_1S = \frac{1}{2}A_1S \sin(2\angle FA_1S)$ .

Значи, услов да права  $P_aP'$  има заједничких тачака с кругом над пречником  $FS$  је  $\frac{1}{2}FS \sin(\pi - \angle FSA_1) + \frac{1}{2}A_1S \sin(2\angle FA_1S) \leq \frac{1}{2}FS$ , тј.  $FS \sin(\pi - \angle FSA_1) + A_1S \sin(2\angle FA_1S) \leq FS$ . У том случају ће услов  $\mathcal{B}(A, P', P_a)$  бити испуњен. Заиста, ако у тачки  $S$  посматрамо тангенту на кругу  $m(X, XS)$ , онда се све тачке тог круга (осим тачке  $S$ ) налазе с оне стране те тангенте с које се налази његов центар  $X$ . Угао  $\angle XSA_1$  је туп, па следи да се све тачке полуправе  $SA_1$  (осим њеног темена) налазе са супротне стране тангенте у односу на тачке круга  $m$ . Угао  $\angle XSP$  је оштар, па је њему напоредан угао  $\angle XSP'$  туп, што значи са се све тачке полуправе  $SP'$  (осим њеног темена) налазе са супротне стране тангенте у односу на тачке круга  $m$ . Следи да су све тачке (конвексног) угла  $\angle A_1SP'$  (осим његовог темена) са супротне стране тангенте у односу на тачке круга  $m$ . Тачка  $P$  је на кругу  $m$ , а због  $\mathcal{B}(P, A_1, P_a)$  следи  $P, P_a \div A_1S$ , па тачка  $P_a$  припада углу  $\angle A_1SP'$ . Због паралелности правих  $P_aP'$  и  $A_1S$  следи да све тачке полуправе  $P'P_a$  припадају углу  $\angle A_1SP'$ , па ниједна тачка круга  $m$  не припада тој полуправој. Дакле, пресечна тачка

А праве  $P_aP'$  и круга  $k$  не припада полуправој  $P'P_a$ , па је  $A, P_a \div P'$ , тј.  $\mathcal{B}(A, P', P_a)$ .

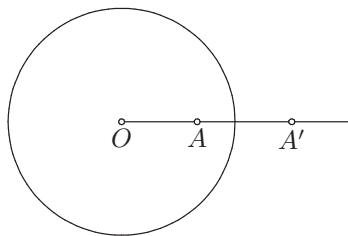
Остаје још да се докаже да је тачка  $A$  у спољашњости круга  $k(S, SP)$  и да њене тангенте секу праву  $FA_1$  са разних страна тачке  $P$ . Углови  $\angle SP'P_a$  и  $\angle PP'P_a$  су исти, а пошто је угао  $\angle PP'P_a$  оштар, значи да полуправа  $P'P_a$  сече круг  $k$  у још једној тачки. Како тачка  $A$  не припада полуправој  $P'P_a$ , следи да она не може припадати ни кругу  $k$  ни његовој унутрашњости, па припада његовој спољашњости, што значи да постоје две тангенте на кругу  $k$  из тачке  $A$ . Такође, само за тачке дужи чији је један крај тачка  $P_a$ , а други крај друга пресечна тачке праве  $P_aP'$  и круга  $k$ , важи да тангенте из ње на кругу  $k$  секу праву  $FA_1$  у тачкама се исте стране тачке  $P$ . Како је та дуж садржана у полуправој  $P'P_a$  којој тачка  $A$  не припада, следи да тангенте из тачке  $A$  секу праву  $FA_1$  са разних страна тачке  $P$ .

Према томе, ако су тачке  $F, A_1, S$  неколинеарне такве да је угао  $\angle FSA_1$  туп и важи  $FS \sin(\pi - \angle FSA_1) + A_1S \sin(2\angle FA_1S) < FS$ , задатак има четири неподударна решења, а ако уместо претходне неједнакости узмемо одговарајућу једнакост, задатак има два неподударна решења. У свим осталим случајевима задатак нема решења.

## 4 Инверзија

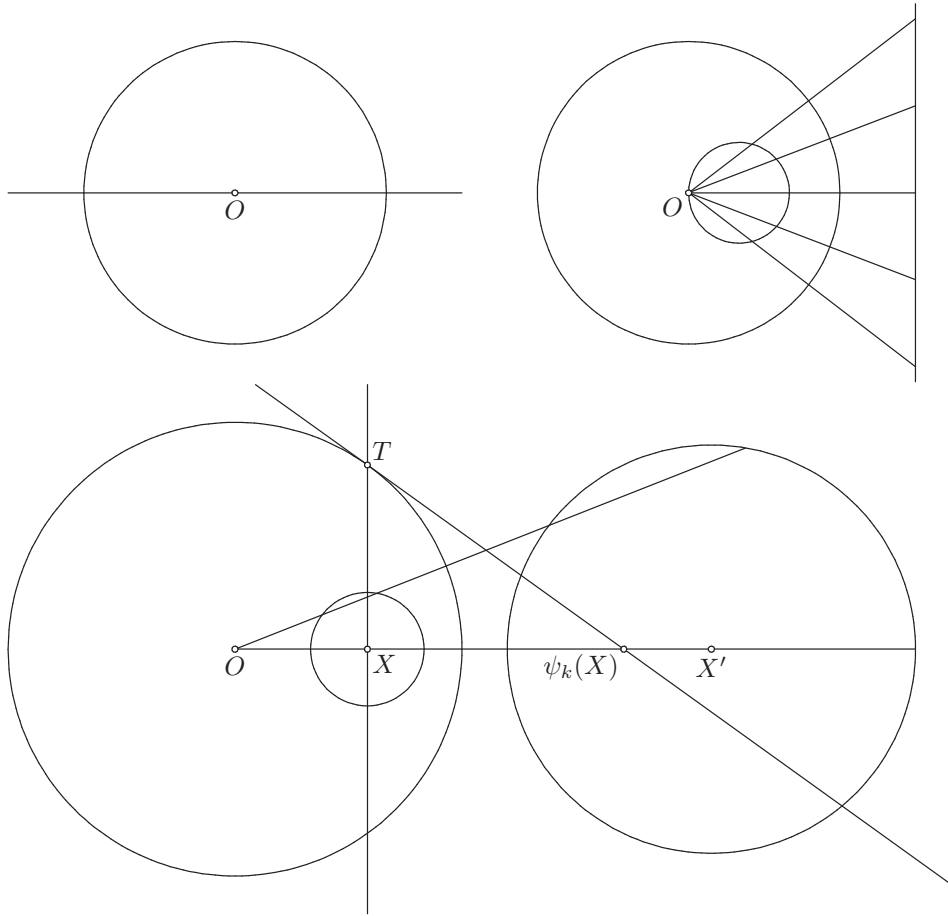
**Дефиниција 24.** Нека је  $k(O, r)$  круг неке равни  $\alpha$ . *Инверзија* у односу на круг  $k$  је пресликавање  $\psi_k : \alpha \setminus \{O\} \rightarrow \alpha \setminus \{O\}$  које тачку  $A$  слика у тачку  $A'$  полуправе  $OA$  такву да важи  $OA \cdot OA' = r^2$ .

Зашто се из домена и кодомена овог пресликавања избацује тачка  $O$ ? Један од разлога је тај што не знамо шта је полуправа  $OO$ , а други је тај што не постоји тачка  $O'$  таква да је  $r^2 = OO \cdot OO' = 0$ , јер је  $r > 0$ . Из истог разлога тачка  $O$  није слика ниједне тачке, па се избацује и из кодомена.

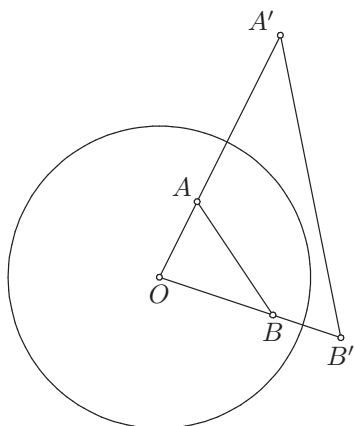


Сада ћемо размотрити особине овог пресликавања. Ово пресликавање је очигледно инволуција ( $\psi_k^2 = \text{Id}$ ), јер ако је  $A'$  слика тачке  $A$ ,

126



Како се инверзијом  $\psi_k$  сликају праве и кругови? Одговор зависи од тога да ли права, односно круг који сликамо садржи тачку  $O$  или не. Ако права  $p$  садржи тачку  $O$ , онда се она инверзијом  $\psi_k$  слика у себе (наравно, то не значи да се свака тачка слика у себе, већ да се свака тачке праве  $p$  слика у неку тачку која је такође на правој  $p$ ). Наравно, слика тачке  $O$  није дефинисана, па се формално уместо праве  $p$  слика скуп  $p \setminus \{O\}$ , а такође  $O$  није слика ниједне тачке, па је слика скупа  $p \setminus \{O\}$  скуп  $p \setminus \{O\}$ . Дакле,  $\psi_k(p \setminus \{O\}) = p \setminus \{O\}$ . Ако права  $p$  не садржи тачку  $O$ , доказује се да се онда она слика у круг  $l$  који садржи тачку  $O$ . Наравно, формално је  $\psi_k(p) = l \setminus \{O\}$ , јер тачка  $O$  није слика ниједне тачке. Пошто је  $\psi_k$  инволуција, следи да се круг  $l$  који садржи тачку  $O$  слика у праву  $p$  која не садржи тачку  $O$ , тј. формално  $\psi_k(l \setminus \{O\}) = p$ . Коначно, круг  $l$  који не садржи тачку  $O$  слика се у круг  $l_1$  који такође не садржи тачку  $O$ , тј.  $\psi_k(l) = l_1$ . На овом месту је веома важно напоменути да се инверзијом центар круга  $l$  **не слика** у центар круга  $l_1$ .



Инверзија такође има следеће особине. Ако су  $A, B$  две разне тачке и  $A' = \psi_k(A), B' = \psi_k(B)$ , онда је  $A'B' = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$ . Заиста, троуглови  $\triangle OAB$  и  $\triangle OB'A'$  су слични јер имају заједнички угао код темена  $O$  и из  $OA \cdot OA' = OB \cdot OB'$  следи да је  $OA : OB' = OB : OA'$ . Према томе,  $OA : OB' = AB : B'A'$ , тј.  $A'B' = \frac{OB'}{OA} AB = \frac{OB \cdot OB'}{OA \cdot OB} AB = \frac{r^2}{OA \cdot OB} AB$ . Такође, инверзија чува углове између кривих. Кад кажемо угао између кривих, мислимо на угао који у њиховој пресечној тачки граде њихове тангенте. Према томе, угао између тангенти на неким двама кривима у њиховој пресечној тачки једнак је углу између тангенти на сликама тих кривих при инверзији  $\psi_k$  у њиховој пресечној тачки. Наравно, тангенте полазних кривих се не сликају на тангенте њихових слика, јер се у општем случају праве сликају у кругове. Напоменимо да тангентом на правој у њеној произвољној тачки сматрамо саму ту праву, као и да пресликавања која чувају углове називамо *конформним* пресликавањима.

С обзиром на то да ћемо овде проучавати само праве и кругове, довољно је рећи да инверзија чува углове између правих и кругова. Штавише, најчешће ћемо имати нормалне праве и кругове, па ћемо користити особину да инверзија чува ту нормалност.

1. Нека је  $k(O, r)$  круг инверзије (дакле,  $O$  је центар инверзије) и нека су  $k_1, k_2$  кругови такви да је  $k_1 \cap k_2 = \{O\}$ . Пошто садржи центар инверзије, кад кажемо да се круг  $k_1$  слика у праву  $k'_1$  која не садржи центар инверзије, морамо имати у виду да слика тачке  $O$  није дефинисана, па се формално скуп  $k_1 \setminus \{O\}$  слика у праву  $k'_1$ , тј. важи  $\psi_k(k_1 \setminus \{O\}) = k'_1$ . Слично и за круг  $k_2$  важи  $\psi_k(k_2 \setminus \{O\}) = k'_2$ , где је  $k'_2$  права која не садржи центар инверзије. Према томе, како је  $\psi_k$  бијекција, важи

$$\begin{aligned} k'_1 \cap k'_2 &= \psi_k(k_1 \setminus \{O\}) \cap \psi_k(k_2 \setminus \{O\}) = \psi_k((k_1 \setminus \{O\}) \cap (k_2 \setminus \{O\})) \\ &= \psi_k((k_1 \cap k_2) \setminus \{O\}) = \emptyset. \end{aligned}$$

Дакле, праве  $k'_1$  и  $k'_2$  немају заједничких тачака, па су паралелне, што је и требало доказати.

2. Нека су  $P, Q$  тачке круга  $k$  такве да су  $P, O, Q, A, A'$  колинеарне. Тада из особина инверзије имамо да важи  $\mathcal{H}(P, Q; A, A')$ . Дуж  $PQ$  је пречник круга  $k$  и круг  $l$  садржи тачке  $A, A'$ , па на основу задатка 2.14. следи да је  $k \perp l$ , што је и требало доказати.

3. Нека је  $k(A, \rho)$  круг с центром у тачки  $A$  чији је полупречник  $\rho$  једнак  $\sqrt{AB \cdot AB'}$ . Тада је  $B' = \psi_k(B)$  и  $C' = \psi_k(C)$ , па се описани круг  $l$  инверзијом  $\psi_k$  слика у праву  $B'C'$  (строго формално,  $\psi_k(l \setminus \{A\}) = B'C'$ ). Такође, права  $AO$  се слика у себе јер садржи центар инверзије (строго формално,  $\psi_k(AO \setminus \{A\}) = AO \setminus \{A\}$ ), а нормална је на кругу  $l$  јер садржи његов центар  $O$ , па следи да је и нормална и на слици круга  $l$ , тј. на правој  $B'C'$ , што је и требало доказати.

4. Означимо кругове описане око троуглова  $\triangle ABP, \triangle ABQ$  редом са  $k_1, k_2$ , а кругове описане око троуглова  $\triangle PQA, \triangle PQB$  редом са  $l_1, l_2$ . С круговима је много мање згодно радити него с правима, па искористимо особину инверзије да кругове које садрже центар инверзије слика у праве. Центар инверзије одаберимо тако да припада највећем броју кругова. Пошто све четири тачке  $A, B, C, D$  припадају по трима круговима, одаберимо било коју од њих за центар инверзија, нпр. тачку  $A$ .

Дакле, нека је  $k(A, \rho)$  круг произвољног полупречника  $\rho > 0$  и нека су тачке  $B', P', Q'$  дате са  $B' = \psi_k(B), P' = \psi_k(P), Q' = \psi_k(Q)$  и праве  $k'_1, k'_2, l'_1$  дате са  $k'_1 = \psi_k(k_1 \setminus \{A\}), k'_2 = \psi_k(k_2 \setminus \{A\}), l'_1 = \psi_k(l_1 \setminus \{A\})$  и нека је круг  $l'_2$  дат са  $l'_2 = \psi_k(l_2)$ . Круг  $k_1$  садржи тачке  $B, P$ , па је  $k'_1 = B'P'$ . Слично,  $k'_2 = B'Q'$  и  $l'_1 = P'Q'$ , а како круг  $l_2$  садржи тачке  $B, P, Q$ , следи да круг  $l'_2$  садржи тачке  $B', P', Q'$ . Угао између праве  $l'_1$  и круга  $l'_2$  једнак је оштром углу између тетиве  $P'Q'$  и тангенте на кругу  $l'_2$  у некој од тачака  $P', Q'$  (подударни су), а тај угао је подударан периферијском углу над тетивом  $P'Q'$ , тј. углу  $\angle P'B'Q'$ , што је угао између правих  $k'_1, k'_2$ . Како инверзија чува углове, следи да је угао између кругова  $l_1, l_2$  подударан углу између  $k_1, k_2$ , што је и требало доказати.

5. Нека је  $k_1 \cap k_2 = \{P\}, k_2 \cap k_3 = \{Q\}, k_3 \cap k_1 = \{R\}$ . Означимо круг описан око троугла  $\triangle PQR$  са  $l$ . Кроз сваку од тачака  $P, Q, R$  пролазе по три од четири дата круга, па је свеједно коју ћемо одабрати за центар инверзије. Одаберимо нпр. тачку  $P$ .

Нека је  $k(P, \rho)$  круг произвољног полупречника  $\rho > 0$  и нека су тачке  $Q', R'$  дате са  $Q' = \psi_k(Q), R' = \psi_k(R)$  и праве  $k'_1, k'_2, l'$  дате са  $k'_1 = \psi_k(k_1 \setminus \{P\}), k'_2 = \psi_k(k_2 \setminus \{P\}), l' = \psi_k(l \setminus \{P\})$ .

$\{P\}$ ),  $k'_2 = \psi_k(k_2 \setminus \{P\})$ ,  $l' = \psi_k(l \setminus \{P\})$  и нека је круг  $k'_3$  дат са  $k'_3 = \psi_k(k_3)$ . На основу 1. задатка следи да важи  $k'_1 \parallel k'_2$ , а такође важи и да су  $k'_1, k'_2$  тангенте на кругу  $k'_3$  редом у тачкама  $R', Q'$ . Према томе, центар круга  $k'_3$  припада правој  $q_1$  која је у тачки  $R'$  управна на правој  $k'_1$  и правој  $q_2$  која је у тачки  $Q'$  управна на правој  $k'_2$ . Због  $k'_1 \parallel k'_2$ , следи да је  $q_1 \parallel q_2$ , па пошто центар круга  $k_3$  припада обема, следи да је  $q_1 = q_2 = Q'R'$ . Међутим, права  $Q'R'$  је у ствари права  $l'$ , па следи да је права  $l'$  нормална на правима  $k'_1, k'_2$  и да садржи центар круга  $k'_3$ , па је нормална и на њему. Инверзија чува углове, па следи да је  $l \perp k_1, k_2, k_3$ , што је и требало доказати.

**6.** Означимо са  $l_1, l_2$  редом кругове описане око троуглова  $\triangle ACE, \triangle ADF$ . Тачка  $A$  припада свим круговима осим кругу  $k_3$ , па одаберимо њу за центар инверзије. Нека је  $k(A, \rho)$  круг произвољног полупречника  $\rho > 0$  и нека су тачке  $B', C', D', E', F'$  дате са  $B' = \psi_k(B), C' = \psi_k(C), D' = \psi_k(D), E' = \psi_k(E), F' = \psi_k(F)$ , праве  $k'_1, k'_2, l'_1, l'_2$  дате са  $k'_1 = \psi_k(k_1 \setminus \{A\}), k'_2 = \psi_k(k_2 \setminus \{A\}), l'_1 = \psi_k(l_1 \setminus \{A\}), l'_2 = \psi_k(l_2 \setminus \{A\})$  и круг  $k'_3$  дат са  $k'_3 = \psi_k(k_3)$ . Инверзија чува углове, па следи да су праве  $k'_1, k'_2$  међусобно управне у тачки  $B'$  и управне на кругу  $k'_3$ , тј. садрже његов центар. Према томе, тачка  $B'$  је центар круга  $k'_3$ . Кругови  $k_1, k_3$  имају заједничке тачке  $E, F$ , па следи да се права  $k'_1$  и круг  $k'_3$  секу у тачкама  $E', F'$ . Слично, права  $k'_2$  и круг  $k'_3$  се секу у тачкама  $C', D'$ . Троуглови  $\triangle B'C'E'$  и  $\triangle B'D'F'$  су једнакокрако правоугли, па следи да су углови  $\angle B'C'E'$  и  $\angle B'D'F'$  једнаки по  $45^\circ$ , па су и међусобно подударни. Према томе, следи да су праве  $C'E'$  и  $D'F'$  паралелне (и углови  $\angle B'C'E'$  и  $\angle B'D'F'$  су углови с паралелним крацима), тј.  $l'_1 \parallel l'_2$ . Како кругови  $l_1$  и  $l_2$  имају заједничку тачку  $A$ , следи да им је то једина заједничка тачка, тј. да се додирују у тачки  $A$ .

**7.** Нека се кругови  $k_1, k_2$  додирују у тачки  $P$ , нека се кругови  $k_2, k_3$  додирују у тачки  $Q$ , нека се кругови  $k_3, k_4$  додирују у тачки  $R$  и нека се кругови  $k_4, k_1$  додирују у тачки  $S$ . Треба доказати да су тачке  $P, Q, R, S$  колинеарне или концикличне. Свака од тачака  $P, Q, R, S$  заједничка је за по два круга, тако да је свеједно коју ћемо одабрати за центар инверзије. Одаберимо нпр. тачку  $P$ .

Нека је  $k(P, \rho)$  круг произвољног полупречника  $\rho > 0$  и нека су тачке  $Q', R', S'$  дате са  $Q' = \psi_k(Q), R' = \psi_k(R), S' = \psi_k(S)$ , праве  $k'_1, k'_2$  дате са  $k'_1 = \psi_k(k_1 \setminus \{P\}), k'_2 = \psi_k(k_2 \setminus \{P\})$  и кругови  $k'_3, k'_4$  дати са  $k'_3 = \psi_k(k_3), k'_4 = \psi_k(k_4)$ . На основу 1. задатка следи да су праве  $k'_1, k'_2$  паралелне, а пошто се  $k_2, k_3$  додирују у тачки  $Q$  и  $k_1, k_4$  додирују у тачки  $S$ , следи да су праве  $k'_1, k'_2$  редом тангенте на круговима  $k_4, k_3$  у тачкама  $S', Q'$ . Пошто се кругови  $k_3, k_4$  додирују у тачки  $R$ , следи да се кругови

$k'_3, k'_4$  додирују у тачки  $R'$ . Ако докажемо да тачке  $Q', R', S'$  припадају некој правој  $p$  и ако  $p \ni P$ , онда је  $\psi_k(p \setminus \{P\}) = p \setminus \{P\}$ , па следи да и тачке  $Q, R, S$ , које су слике тачака  $Q', R', S'$  при инверзији  $\psi_k$ , припадају правој  $p$ , која садржи тачку  $P$ , тј. да су  $P, Q, R, S$  колинеарне, а ако  $p \not\ni P$ , онда је  $\psi_k(p) = p' \setminus \{P\}$ , где је  $p'$  круг који садржи тачку  $P$  и који садржи тачке  $Q, R, S$ , које су слике тачака  $Q', R', S'$  при инверзији  $\psi_k$ , тј. онда су  $P, Q, R, S$  концикличне.

Означимо са  $O_3, O_4$  редом центре кругова  $k'_3, k'_4$ . Пошто се они додирују у тачки  $R'$ , следи да су тачке  $O_3, R', O_4$  колинеарне. Према томе, довољно је доказати да важи  $\angle S'R'O_4 = \angle Q'R'O_3$ , јер ће тада то бити унакрсни углови и доказаћемо да су  $Q', R', S'$  колинеарне. Пошто су праве  $k'_1, k'_2$  редом тангенте на круговима  $k'_4, k'_3$  у тачкама  $S', Q'$ , следи да је  $S'O_4 \perp k'_1$  и  $Q'O_3 \perp k'_2$ , а пошто су и паралелне, следи да важи  $S'O_4 \parallel Q'O_3$ . Према томе, углови  $\angle S'O_4R'$  и  $\angle Q'O_3R'$  јесу углови с паралелним крацима, па су подударни, тј. важи  $\angle S'O_4R' = \angle Q'O_3R'$ . Троуглови  $\triangle O_4S'R', \triangle O_3Q'R'$  су једнакокрани и имају подударне углове при врху, па следи да имају подударне и остале углове. Специјално, важи  $\angle S'R'O_4 = \angle Q'R'O_3$ , што смо и хтели да докажемо. Према томе, тачке  $P, Q, R, S$  јесу колинеарне или концикличне.

**8.** Претпоставља се да су тачке  $A, B$  различите, иначе је задатак тривијалан и има бесконачно много решења.

**Анализа.** Нека је  $k$  круг који испуњава услове задатка, тј. нека  $k \ni A, B$  и нека  $k$  додирује  $p$ . Ако се круг  $k$  и права  $p$  додирују у некој од тачака  $A, B$ , центар круга  $k$  налази се у пресеку праве која је у тој тачки управна на правој  $p$  и медијатрисе дужи  $AB$ . У супротном, одаберимо за центар инверзије неку од тачака  $A, B$ , нпр. тачку  $A$ .

Нека је  $l(A, \rho)$  круг произвољног полупречника  $\rho > 0$  и нека је тачка  $B'$  дата са  $B' = \psi_l(B)$ , права  $k'$  дата са  $k' = \psi_l(k \setminus \{A\})$  и круг  $p'$  дат са  $p' \setminus \{A\} = \psi_l(p)$ , при чему  $k' \not\ni A$  и  $p' \ni A$ . Круг  $k$  садржи тачку  $B$  и додирује праву  $p$ , па следи да права  $k'$  садржи тачку  $B'$  и додирује круг  $p'$ , тј. да је тангента из тачке  $B'$  на кругу  $p'$ .

**Конструкција.** Ако нека од тачака  $A, B$  припада правој  $p$ , конструишимо нормалу на правој  $p$  у тој тачки и конструишимо медијатрису дужи  $AB$ . У пресеку тих правих означимо тачку  $O$  и конструишимо круг  $k(O, OA)$ .

Нека  $p \not\ni A, B$ . Конструишимо круг  $l(A, \rho)$  произвољног полупречника  $\rho > 0$ . Конструишимо круг  $p'$  који садржи тачку  $A$  такав да важи  $p' \setminus \{A\} = \psi_l(p)$ . Одредимо тачку  $B' = \psi_l(B)$  и конструишимо тангенту  $k'$  из тачке  $B'$  на кругу  $p'$  такву да  $k' \not\ni A$ . Конструишимо круг  $k$  који садржи тачку  $A$  такав да важи  $k \setminus \{A\} = \psi_l(k')$ .

**Доказ.** Ако нека од тачака  $A, B$  припада правој  $p$ , конструисани круг  $k$  тривијално испуњава услове задатка. Заиста, његов центар  $O$  припада медијатриси дужи  $AB$ , па пошто му је полупречник  $OA$ , следи да садржи тачке  $A, B$ , а пошто је права  $p$  нормална на одговарајућем полупречнику, следи да је тангента, тј. да круг  $k$  додирује праву  $p$ .

Нека  $p \not\equiv A, B$ . По конструкцији,  $k'$  је права која не садржи тачку  $A$ , тј. центар инверзије, па је  $k$  круг који садржи тачку  $A$ . Такође, права  $k'$  садржи тачку  $B' = \psi_l(B)$ , па следи да  $k$  садржи тачку  $B = \psi_l(B')$ . Коначно, права  $p$  не садржи тачку  $A$ , па је  $p'$  јесте круг који садржи тачку  $A$ , а по конструкцији права  $k'$  додирује круг  $p'$  (у тачки различитој од тачке  $A$ , јер је  $k'$  не садржи), па следи да круг  $k'$  додирује праву  $p$ .

**Дискусија.** Ако нека од тачака  $A, B$  припада правој  $p$ , задатак има јединствено решење ако друга од њих не припада правој  $p$ , иначе нема решења. Ако ниједна од тачака  $A, B$  не припада правој  $p$ , онда је број решења једнак броју тангената из тачке  $B'$  на кругу  $p'$  које не садрже тачку  $A$ , што може бити нула ако је  $B'$  у унутрашњости круга  $p'$ , један ако је  $B'$  у спољашњости круга  $p'$  и једна од тангената је права  $AB'$ , односно два у свим осталим случајевима ( $B'$  не може припадати кругу  $p'$ , јер разматрамо случај кад  $p \not\equiv A, B$ ). Штавише, тачка  $B'$  припада спољашњости круга  $p'$  ако и само ако важи  $A, B \div p$ , а права  $AB'$  је тангента на кругу  $p'$  ако и само ако важи  $AB \parallel p$ .

## 9.

**Анализа.** Нека је  $k$  круг који испуњава услове задатка, тј. нека  $k \ni A$  и нека  $k$  додирује кругове  $k_1, k_2$ . Нека је  $l(A, \rho)$  круг произвољног полупречника  $\rho > 0$  и нека је права  $k'$  дата са  $k' = \psi_l(k \setminus \{A\})$ . За праву  $k'$  важи да не садржи тачку  $A$ . Разликујемо три случаја: када тачка  $A$  припада и кругу  $k_1$  и кругу  $k_2$ , када припада тачно једном од њих (без умањења општости, кругу  $k_1$ ) и када не припада ниједном од њих. У првом случају се инверзијом у односу на круг  $l$  оба круга (строго формално, без тачке  $A$ ) сликају у праве које не садрже тачку  $A$ . Пошто се кругови  $k_1, k$  додирују у тачки  $A$ , на основу 1. задатка следи да важи  $k'_1 \parallel k'$ . Исти закључак важи и за праве  $k'_2, k'$ , тј. важи  $k'_2 \parallel k'$ . У другом случају је  $k'_2 = \psi_l(k_2)$  круг који не садржи тачку  $A$  и додирује праву  $k'$ , тј.  $k'$  је тангента на кругу  $k'_2$  и паралелна је са  $k'_1$ . У трећем случају су и  $k'_1 = \psi_l(k_1)$  и  $k'_2 = \psi_l(k_2)$  кругови који не садрже тачку  $A$  и додирују праву  $k'$ , тј.  $k'$  је заједничка тангента кругова  $k'_1, k'_2$ .

**Конструкција.** Конструисамо круг  $l(A, \rho)$  произвољног полупречника  $\rho > 0$ . У зависности од тога да ли тачка  $A$  припада круговима  $k_1, k_2$  или

не, конструишимо њихове слике  $k'_1, k'_2$  при инверзији  $\psi_l$ . Конструишимо праву  $k'$  која не садржи тачку  $A$  и испуњава један од следећа три услова:

1. паралелна је правима  $k'_1, k'_2$  ако  $A \in k_1, k_2$ ;
2. паралелна је правој  $k'_1$  и тангента је на кругу  $k'_2$ , ако  $A \in k_1$  и  $A \notin k_2$ ;
3. заједничка је тангента на круговима  $k'_1, k'_2$ , ако  $A \notin k_1, k_2$ .

Конструишимо круг  $k$  који садржи тачку  $A$  такав да важи  $k \setminus \{A\} = \psi_l(k')$ .

**Доказ.** По конструкцији је  $k'$  права која не садржи тачку  $A$ , тј. центар инверзије, па је  $k$  круг који садржи тачку  $A$ . Права која не садржи тачку  $A$  и паралелна је правој  $k'$  слика се у круг који додирује круг  $k$  у центру инверзије, тј. у тачки  $A$ , а круг који не садржи тачку  $A$  и додирује праву  $k'$  слика се у круг који не садржи тачку  $A$  и додирује круг  $k$ . Према томе, у свим претходно разматраним случајевима следи да кругови  $k_1, k_2$  додирују круг  $k$ .

**Дискусија.** Број решења једнак је броју правих не садрже тачку  $A$  и испуњавају одговарајући услов из дела Конструкција. У првом случају има бесконачно много решења ако су праве  $k'_1, k'_2$  паралелне, односно нема решења ако се те праве секу. У другом случају број таквих правих може бити један или два, у зависности од тога да ли нека од двеју тангенти на кругу  $k'_2$  које су паралелне правој  $k'_1$  садржи тачку  $A$  или не, а у трећем случају број таквих правих може бити од нула до четири, у зависности од међусобног положаја кругова  $k'_1, k'_2$  (рачунају се и заједничке спољашње и заједничке унутрашње тангенте).

**10.** Решење овог задатка неће бити дато као решења осталих конструктивних задатака (иако треба исписати све четири етапе, као и у осталим таквим задацима), јер ће се једноставном трансформацијом довести до неког од претходна два задатка, која знамо да решимо. Нека круг  $k(O, r)$  додирује кругове  $k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2), k_3(O_3, r_3)$  споља. Нека је, без умањења општости,  $r_1 \leq r_2, r_3$  и нека је  $l(O, r + r_1)$  круг. Тада круг  $l$  садржи центар  $O_1$  круга  $k_1$ . Ако важи нека од једнакости  $r_1 = r_2, r_1 = r_3$ , онда круг  $l$  садржи и неку од тачака  $O_2, O_3$ . Ако садржи обе, онда је он описани круг троугла  $\triangle O_1 O_2 O_3$ . Ако садржи само једну од њих (без умањења општости, тачку  $O_2$ ), онда он додирује круг  $l_3(O_3, r_3 - r_1)$  споља. Дакле, тада круг  $l$  садржи тачке  $O_1, O_2$  и додирује круг  $l_3$  споља, па се његова конструкција врши слично као у 8. задатку. Тамо је, додуше, задатак био да се конструише круг који садржи две дате тачке и додирује дату праву, а овде уместо праве треба да додирује круг споља, али се и овај задатак решава на исти начин. Ако не садржи ниједну од тачака  $O_2, O_3$ , онда додирује и круг  $l_2(O_2, r_2 - r_1)$  споља и круг  $l_3(O_3, r_3 - r_1)$

споља, па се његова конструкција врши исто као у претходном задатку (круг који садржи дату тачку и додирује два дата круга), с тим што се овде узимају у обзир само заједничке спољашње тангенте и то такве да су  $O_1, l'_2, l'_3$  с исте стране те тангенте, иначе ће круг добијен инверзијом додиривати кругове  $l_2, l_3$  унутра.

## 5 Изометријске трансформације равни

Рекли смо да су две фигуре подударне ако имају исти облик и исту величину, али и да таква дефиниција није прецизна, јер је тешко дефинисати појмове облика и величине. Затим смо рекли да су две фигуре подударне ако се померањем једне од њих може довести до њиховог преклапања. У овом поглављу проучаваћемо управо та „кретања” фигура. Уведимо прецизну дефиницију.

**Дефиниција 25.** Нека је  $\alpha$  равн. Пресликавање  $\mathfrak{I} : \alpha \longrightarrow \alpha$ , такво да за сваки пар тачака  $(A, B)$  равни  $\alpha$  важи  $(A, B) \cong (\mathfrak{I}(A), \mathfrak{I}(B))$ , називамо *изометријском трансформацијом* (изометријом) равни  $\alpha$ .

Наравно, релација подударности парова тачака јесте основни појам, тј. не дефинише се. Све изометрије су бијекције, сликају праве у праве (штавише, чувају распоред тачака на правој, тј. ако важи  $\mathcal{B}(A, B, C)$ , онда важи  $\mathcal{B}(\mathfrak{I}(A), \mathfrak{I}(B), \mathfrak{I}(C))$ ), полуправе у полуправе, дужи у дужи, полуравни у полуравни, угаоне линије у угаоне линије, углове у углове итд. Једино што изометрије могу да не чувају јесте оријентација равни и такве изометрије називамо *индиректним* изометријама, а оне које чувају оријентацију равни називамо *директним* изометријама. Такође, композиција  $\mathfrak{I} \circ \mathfrak{J}$  изометрија  $\mathfrak{I}, \mathfrak{J}$  такође је изометрија. Дакле, управо су изометрије пресликавања која чувају облик фигура, а због особине  $(A, B) \cong (\mathfrak{I}(A), \mathfrak{I}(B))$  следи да чувају и величину. Према томе, имамо следећу (прецизну) дефиницију подударности.

**Дефиниција 26.** Нека су  $\Phi, \Phi' \subseteq \alpha$  фигура у равни  $\alpha$ . Ако постоји изометрија  $\mathfrak{I} : \alpha \longrightarrow \alpha$  равни  $\alpha$  таква да важи  $\Phi' = \mathfrak{I}(\Phi)$ , онда кажемо да је фигура  $\Phi$  *подударна* фигури  $\Phi'$  и пишемо  $\Phi \cong \Phi'$ .

Није тешко доказати да је релација  $\cong$  подударности фигура једна релација еквиваленције. Због симетричности релације чешће ћемо говорити да су фигуре *међусобно подударне*. Наравно, јасно је да су дужи  $AB, A'B'$  међусобно подударне ако и само ако важи  $(A, B) \cong (A', B')$ .

Сада ћемо видети које све изометрије равни постоје и у каквим су оне односима.

**Дефиниција 27.** Нека је  $p \subset \alpha$  права равни  $\alpha$  и нека је пресликавање  $\mathcal{S}_p$  дато на следећи начин: ако је  $X \in p$ , онда је  $\mathcal{S}_p(X) = X$ , а иначе је  $\mathcal{S}_p(X) = X'$ , где је  $X'$  тачка таква да је  $p$  медијатриса дужи  $XX'$  у равни  $\alpha$ . Онда се пресликавање  $\mathcal{S}_p$  назива *осном рефлексijом* (осном симетријом) равни  $\alpha$  с осом  $p$ .

С осном рефлексijом смо се сусрели још у основној школи. То је једна изометрија, јер је слика произвољне дужи  $AB$  таква дуж  $A'B'$  ( $A' = \mathcal{S}_p(A), B' = \mathcal{S}_p(B)$ ) да је једна од њих „лик у огледалу” другој и обратно. Очигледно је онда да важи  $(A', B') \cong (A, B)$ , па  $\mathcal{S}_p$  јесте изометрија. Шта се дешава ако двапут применимо осну рефлексijу? По дефиницији се тачке праве  $p$  сликају у себе, а ако се  $X$  слика у  $X'$  такво да је  $p$  медијатриса дужи  $XX'$ , онда се  $X'$  мора сликати у  $X$ . Дакле,  $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{S}_p = \text{Id}$ , што значи да је осна рефлексija сама себи инверз, односно да је инволуција. По дефиницији се тачке осе  $p$  сликају у себе, а тачке ван праве  $p$  се не сликају у себе (да би постојала дуж чија је  $p$  медијатриса), па су једине фиксне тачке (тачке које се сликају у себе) тачке осе  $p$ . Што се промене оријентације тиче, ако је  $\triangle ABC$  позитивно оријетнисан троугао, тј. ако су  $A, B, C$  тачке равни  $\alpha$  такве да се од темена  $A$  ка темену  $B$  па затим ка темену  $C$  иде у позитивном смеру, онда је троугао  $\triangle A'B'C'$ , где су  $A', B', C'$  редом слике тачака  $A, B, C$  при осној рефлексiji  $\mathcal{S}_p$ , негативно оријетнисан троугао. Према томе, осна рефлексija мења оријентацију равни, па је индиректна изометрија равни.

**Теорема 12.** Ако је  $\mathcal{I}$  индиректна изометрија равни  $\alpha$  која има бар једну фиксну тачку  $P$ , онда је  $\mathcal{I}$  осна рефлексija  $\mathcal{S}_p$  чија оса  $p \subset \alpha$  садржи фиксну тачку  $P$ .

**Теорема 13** (Теорема о трансмутацији). Нека је  $p \subset \alpha$  права равни  $\alpha$ ,  $\mathcal{S}_p$  осна рефлексija и  $\mathcal{I}$  произвољна изометрија равни  $\alpha$ . Ако је  $p' = \mathcal{I}(p)$ , онда је  $\mathcal{I} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{I}^{-1} = \mathcal{S}_{p'}$ .

**Дефиниција 28.** Нека је  $\Phi \subseteq \alpha$  фигура равни  $\alpha$ . Кажемо да је права  $p$  оса симетрије фигуре  $\Phi$  ако је  $\mathcal{S}_p(\Phi) = \Phi$ . Ако фигура  $\Phi$  има бар једну осу симетрије, кажемо да је она *осносиметрична*.

Сваку изометрију равни  $\alpha$  можемо изразити преко осних рефлексija. Штавише, увек их можемо одабрати тако да их буде највише три.

**Теорема 14.** Нека је  $\mathcal{I}$  произвољна изометрија равни  $\alpha$ . Тада је  $\mathcal{I} = \mathcal{S}_p$  за неку праву  $p \subset \alpha$ , или је  $\mathcal{I} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$  за неке праве  $p, q \subset \alpha$ , или је  $\mathcal{I} = \mathcal{S}_r \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$  за неке праве  $p, q, r \subset \alpha$ .

У дефиницији 15 увели смо појам прамена правих у равни. Прамен правих је у директној вези с композицијом осних рефлексција. Наиме, важи следећа важна теорема.

**Теорема 15.** *Нека су  $p, q, r \subset \alpha$  праве равни  $\alpha$ . Онда је композиција  $S_r \circ S_q \circ S_p$  осна рефлексција ако и само ако праве  $p, q, r$  припадају једном прамену. Штавише, када оса те рефлексје (означимо је са  $s$ ) припада том прамену и ако је права  $a$  оса симетрије пара правих  $p, r$ , када је  $a$  оса симетрије пара правих  $q, s$ .*

Утврдимо које још изометрије равни постоје.

**Дефиниција 29.** Пресликавање  $\mathcal{E} : \alpha \longrightarrow \alpha$  такво да је  $\mathcal{E}(X) = X$  за сваку тачку  $X \in \alpha$  називамо *коинциденцијом*.

Коинциденција је, у ствари, идентичко пресликавање. Оно је тривијално изометрија, јер је  $(A, B) \cong (A, B) = (\mathcal{E}(A), \mathcal{E}(B))$  за сваки пар тачака  $A, B$ . С обзиром на то да је  $S_p \circ S_p = \text{Id} = \mathcal{E}$ , имамо репрезентацију коинциденције преко производа деју изометрија. Тривијално, коинциденција је директна изометрија равни.

**Теорема 16.** *Ако изометрија  $\mathfrak{I}$  равни  $\alpha$  има бар три неколинеарне фиксне тачке, онда је  $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$ . Ако директна изометрија  $\mathfrak{I}$  равни  $\alpha$  има бар две разне фиксне тачке, онда је  $\mathfrak{I} = \mathcal{E}$ .*

**Дефиниција 30.** Нека је  $S \in \alpha$  тачка равни  $\alpha$  и  $\varphi$  оријентисани угао у тој равни. Пресликавање  $\mathcal{R}_{S, \varphi} : \alpha \longrightarrow \alpha$  такво да је  $\mathcal{R}_{S, \varphi}(S) = S$  и  $\mathcal{R}_{S, \varphi}(X) = X'$  где је  $X'$  таква да важи  $SX = SX'$  и  $\angle XSX' = \varphi$  (подударни су и имају исту оријентацију), за тачке  $X \neq S$ , назива се *ротацијом* (*централном ротацијом*) око центра  $S$  за оријентисани угао  $\varphi$ .

Да бисмо разумели како ротација пресликава тачке равни  $\alpha$ , замислимо да имамо крути штап чији један крај у центру  $S$  и који је фиксиран, а други крај је у произвољној тачки  $X$  равни  $\alpha$ . Ротацијом штапа за оријентисани угао  $\varphi$  добијемо положај тачке  $X' = \mathcal{R}_{S, \varphi}$ . Како видети ротацију као композицију двеју осних рефлексја? Означимо са  $p$  произвољну праву равни  $\alpha$  која садржи тачку  $S$  и са  $q$  праву равни  $\alpha$  добијену ротацијом праве  $p$  око центра  $S$  за оријентисани угао  $\frac{\varphi}{2}$ . Није тешко доказати да у том случају важи  $\mathcal{R}_{S, \varphi} = S_q \circ S_p$ . Дакле, ротација је композиција осних рефлексја чије се осе секу у центру ротације тако да је оријентисани угао од оне праве у односу на коју се прво примењује рефлексја (дакле, с десне стране симбола  $\circ$ ) ка другој подударан

половини оријентисаног угла ротације. Напоменимо да репрезентација ротације  $\mathcal{R}_{S,\varphi}$  као  $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$  није јединствена, јер праве  $p, q$  можемо ротирати око центра  $S$  за произвољан угао и добити праве  $p', q'$  такве да је композиција  $\mathcal{S}_{q'} \circ \mathcal{S}_{p'}$  такође једнака полазној ротацији.

Ако тачку  $X$  прво ротирамо око тачке  $S$  за оријентисани угао  $\varphi$ , а потом око исте тачке за оријентисани угао  $\psi$ , потпуно исту тачку ћемо добити као да смо одмах тачку  $X$  ротирали око тачке  $S$  за оријентисани угао  $\varphi + \psi$ . Очигледно је  $\mathcal{R}_{S,0^\circ} = \mathcal{R}_{S,360^\circ} = \mathcal{E}$ , јер се ротацијом за  $0^\circ$  ништа не дешава, а ротацијом за  $360^\circ$  обиђе цео круг око тачке  $S$ , па се вратимо у почетну тачку. Према томе, ако са  $-\varphi$  означимо угао подударан углу  $\varphi$  који има супротну оријентацију од њега, онда је  $\mathcal{R}_{S,\varphi}^{-1} = \mathcal{R}_{S,-\varphi}$ . Додавање угла  $360^\circ$  ништа не мења, па можемо рећи и да је  $\mathcal{R}_{S,\varphi}^{-1} = \mathcal{R}_{S,360^\circ-\varphi}$ . Ротација је директна изометрија. То можемо видети како из дефиниције, тако и из репрезентације  $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ , јер у равни постоје само две оријентације, па пошто се применом двеју рефлексција двапут промени оријентација, следи да је на крају оријентација иста као и на почетку. Што се фиксних тачака тиче, важи следеће. Ако је  $\varphi$  једнак неком од углова  $0^\circ, 360^\circ$ , онда је у питању коинциденција, тј. све су тачке фиксне, а ако није, онда је једина фиксна тачка центар ротације, тј. тачка  $S$ .

**Теорема 17.** *Ако директна изометрија  $\mathcal{I}$  равни  $\alpha$  има тачно једну фиксну тачку  $S$ , онда је  $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{S,\varphi}$ , за неки оријентисани угао  $\varphi$  различит од  $0^\circ, 360^\circ$ .*

Специјални случај централне ротације јесте онај у коме је угао ротације једнак  $180^\circ$ . Тада за тачку  $X' = \mathcal{S}(X)$ , где је  $X \neq S$ , важи да је  $SX' = SX$  и  $\angle XSX' = 180^\circ$ , тј. важи  $\mathcal{B}(X, S, X')$ . Тачка  $S$  је онда средиште дужи  $XX'$ . Пресликавање које је дефинисано на сличан начин јесте управо осна рефлексija. Стога се ово пресликавање назива *централном симетријом* и означава се са  $\mathcal{S}_S$ . Јасно је да важи  $\mathcal{S}_S^{-1} = \mathcal{S}_S$ , јер је  $\mathcal{R}_{S,180^\circ}^{-1} = \mathcal{R}_{S,360^\circ-180^\circ} = \mathcal{R}_{S,180^\circ}$ . Такође, ако је  $\mathcal{S}_S = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ , онда је оријентисани угао од праве  $p$  ка правој  $q$  подударан углу  $\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ , тј. важи  $p \perp q$ .

Ротација за угао  $\varphi$ , такав да је  $-180^\circ < \varphi < 180^\circ$  и  $\varphi \neq 0^\circ$ , слика праву  $p$  у праву  $p'$  која с њом гради угао  $\varphi$ , без обзира да ли права  $p$  садржи центар ротације или не. Заиста, нека је  $S$  центар инверзије,  $N$  подножје управне из тачке  $S$  на правој  $p$ ,  $P$  тачка праве  $p$  таква да је  $\angle PSN = \frac{\varphi}{2}$  (подударни углови и иста оријентација),  $Q$  тачка праве  $p$  таква да је  $\angle NSQ = \frac{\varphi}{2}$  и  $R = \mathcal{R}_{S,\varphi}(Q)$ . Докажимо да је  $Q = \mathcal{R}_{S,\varphi}(P)$ . Троуглови  $\triangle PSN, \triangle QSN$  јесу подударни, јер имају заједничку страну  $SN$  и важи  $\angle PNS = 90^\circ = \angle QNS$  и  $\angle PSN = \angle QSN$  (није битна оријентација). Следи да је  $SP = SQ$ , а пошто је  $\angle PSQ = \angle PSN + \angle NSQ =$

$\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = \varphi$  (сад узимамо у обзир и оријентацију), заиста је  $Q = \mathcal{R}_{S,\varphi}(P)$ . Према томе, следи да је  $p' = \mathcal{R}_{S,\varphi}(p) = QR$ , па је угао између правих  $p, p'$  једнак углу  $\angle PQR$ . Из правоуглог троугла  $\triangle SNQ$  добијамо да је  $\angle NQS = 90^\circ - \angle NSQ = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$ . Пошто је  $\mathcal{R}_{S,\varphi}(\angle PQS) = \angle QRS$ , следи подударност тих углова, а због  $\angle PQS = \angle NQS = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$  следи да је  $\angle PQR = \angle PQS + \angle QSR = 2 \cdot (90^\circ - \frac{\varphi}{2}) = 180^\circ - \varphi$ . Тиме је доказ завршен, јер ако је један од углова између правих  $p, p'$  једнак  $180^\circ - \varphi$ , њему напоредни угао је једнак  $\varphi$ .

**Дефиниција 31.** Нека је  $\overrightarrow{AB}$  вектор у равни  $\alpha$ . Пресликавање  $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} : \alpha \longrightarrow \alpha$  дато са  $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}(X) = X'$ , где је  $X'$  таква да је  $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$ , назива се *транслацијом* за вектор  $\overrightarrow{AB}$ .

Транслација не представља ништа друго него праволинијско кретање у одређеном смеру. Ако је  $\overrightarrow{AB}$  нула вектор, онда транслација нема фиксних тачака, а ако јесте, онда се ниједна тачка не помера, тј. све су тачке фиксне (у питању је коинциденција). Није тешко видети да је композиција транслација за векторе  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$  транслација за вектор  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ , као ни да је инверз транслације за вектор  $\overrightarrow{AB}$  транслација за вектор  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ . Дакле, транслације (заједно са коинциденцијом) чине групу која је подгрупа групе изометрија.

Нека је  $p$  права која садржи тачку  $A$  и управна је на правој  $AB$  и нека је  $q$  права која садржи средиште  $C$  дужи  $AB$  и управна је на правој  $AB$ . Јасно, тада је  $p \parallel q$ . Није тешко доказати да важи  $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p$ . Дакле, и транслацију видимо као композицију двеју осних рефлексии. Наравно, ово није једина репрезентација транслације  $\mathcal{T}_{\overrightarrow{AB}}$ , тј. уместо правих  $p, q$  можемо посматрати праве  $p', q'$  које су управне на  $AB$  и налазе се на растојању  $\frac{AB}{2}$ , при чему је смер од праве  $p'$  ка правој  $q'$  исти као смер вектора  $\overrightarrow{AB}$ .

## 6 Поенкареов диск модел

Нека је  $k$  круг еуклидске равни којег ћемо називати *апсолутом*. Његова унутрашњост (отворени диск) представља једну  $h$ -раван, тј. модел равни хиперболичке геометрије. Сама апсолута није у оквиру модела, тј. није део  $h$ -равни и сматра се да су то бесконачно далеке тачке. Тачке тог отвореног диска називамо  $h$ -тачкама. Што се  $h$ -правих тиче, оне ће бити представљене или отвореним пречницима апсолуте (дакле, отвореним тетивама круга  $k$  које садрже његов центар), као и отвореним кружним луковима оних кругова који су управни на апсолути, чије су

крајње тачке на апсолути. Дакле,  $h$ -праве су делови еуклидских правих ако садрже центар апсолуте, односно делови еуклидских кругова који су управни на апсолути.

Јасно је како се дефинише релација  $h$ -између  $(\mathcal{B}_h)$ , па су тиме дефинисани и појмови  $h$ -полуправих,  $h$ -дужи,  $h$ -углова,  $h$ -полигонских линија итд. Из аксиома непрекидности за праве и њихових последица за круг (Дедекиндова теорема) следи да важе аксиоме непрекидности. Две  $h$ -праве су  $h$ -паралелне ако се секу на апсолути, а ако су дисјунктне и нису  $h$ -паралелне, онда су  $h$ -хиперпаралелне. Једино нам недостаје да видимо како се дефинише  $h$ -подударност. За то нам је довољно да опишемо како изгледају  $h$ -изометрије, односно која пресликавања у оквиру модела (дакле, сликају унутрашњост диска у себе) представљају  $h$ -изометрије. Као што знамо, свака изометрија (било еуклидске, било хиперболичке равни) може се преставити као композиција навише трију осних рефлексција, па је довољно да дефинишемо осне рефлексije модела, тј.  $h$ -рефлексije. Ако је  $h$ -права  $p$  део еуклидске праве, дефинишимо  $h$ -рефлексiju  $\mathcal{S}_p$  тако да сваку  $h$ -тачку слика на исти начин као одговарајућа еуклидска осна рефлексija. Ако је, пак,  $h$ -права  $p$  део еуклидског круга, дефинишимо  $h$ -рефлексiju  $\mathcal{S}_p^h$  тако да сваку  $h$ -тачку  $X$  слика у  $h$ -тачку  $X'$  која се добија еуклидском инверзијом у односу на еуклидски круг који садржи  $h$ -праву  $p$ . Ово је сасвим природна дефиниција, јер је инверзија, на неки начин, рефлексija у односу на круг. Додуше, еуклидска инверзија не чува еуклидску подударност, али ћемо у моделу дефинисати  $h$ -подударност тако да је инверзија као  $h$ -рефлексija чува, да би она била  $h$ -изометрија. Није тешко проверити да је овако дефинисано пресликавање индиректно и да има бар једну фиксну тачку (штавише, свака тачка  $h$ -праве  $p$  је фиксна), па заиста представља осну рефлексiju у моделу, тј.  $h$ -рефлексiju.

Сада имамо реалну представу како изгледа раван хиперболичке геометрије. Напоменимо како се мере дужине и углови у овом моделу. С обзиром на то да (еуклидске) инверзије не чувају (еуклидску) подударност парова тачака, следи да дужина  $h$ -дужи није једнака еуклидској дужини одговарајуће дужи или кружног лука. Што је  $h$ -тачка ближа апсолути, тј. бесконачности, то растојање од ње до неке фиксиране  $h$ -тачке све брже расте. Међутим, (еуклидска) инверзија чува (еуклидске) углове између кривих. Одавде се може извести да је  $h$ -мера углова једнака еуклидској мери, па имамо да су  $h$ -праве  $h$ -ортогоналне ако и само ако су одговарајући еуклидски кругови и/или еуклидске праве међусобно ортогонални.

Чињеница да су  $h$ -праве које пролазе кроз центар апсолуте делови еуклидских правих од веома је велике користи. Зато је од великог значаја

пронаћи начин како пресликати произвољну  $h$ -тачку  $A$  у центар апсолуте  $O$ . Најбоље је наћи  $h$ -рефлексију, јер се једноставно конструишу слике тачака и  $h$ -правих при еуклидским рефлексијама и еуклидским инверзијама. Конструишимо еуклидску нормалу  $n$  на  $OA$  у тачки  $A$ , означимо једну од њених пресечних тачака са апсолутом са  $T$  и конструишимо тангенту  $t$  на апсолути  $k$  у тачки  $T$ . Њен пресек с полуправом  $OA$  означимо са  $A'$ . Круг  $l(A', A''T)$  има особину да му центар припада тангенти круга  $k$ , па је ортогоналан на кругу  $k$ , тј. на апсолути, што значи да садржи тачке  $h$ -праве, коју ћемо исто означити са  $l$ . Троуглови  $\triangle A'AT$ ,  $\triangle A'TO$  имају зајднички угао код темена  $A'$  и подударне праве углове  $\angle A'AT$ ,  $\angle A'TO$ , па су слични. Следи да је  $\frac{A'A}{A'T} = \frac{A'T}{A'O}$ , тј. да је  $A'A \cdot A'O = A'T^2$ , па је  $\psi_l(A) = O$ . Како и  $h$ -рефлексија  $\mathcal{S}_l^h$  делује исто као еуклидска инверзија  $\psi_l$ , следи да је  $\mathcal{S}_l^h(A) = O$ , па је тиме одређена  $h$ -права  $l$  таква да се  $h$ -рефлексијом  $\mathcal{S}_l^h$  тачка  $A$  слика центар апсолуте  $O$ . Ова конструкција нам је најважнија, јер ће се користити у свим задацима.

**1.** Претпоставимо да се  $h$ -тачка  $A$  поклапа с центром апсолуте. Тада  $h$ -права  $n$  коју треба да конструишемо садржи центар апсолуте, па је део еуклидске праве. Потребно је да она буде управна на  $h$ -правој  $a$ , па ако је  $h$ -права  $a$  део еуклидске праве, конструишемо еуклидску праву која садржи тачку  $A$  и нормална је на правој која садржи  $h$ -праву  $a$ , а ако је  $h$ -права  $a$  део еуклидског круга, конструишемо еуклидску праву која садржи тачку  $A$  и нормална је на кругу који садржи  $h$ -праву  $a$ , тј. еуклидску праву која садржи тачку  $A$  и центар круга који садржи  $h$ -праву  $a$ .

Претпоставимо сада да се  $h$ -тачка  $A$  разликује од центра апсолуте  $O$ . У уводном делу је описано како се може конструисати  $h$ -права  $l$  таква да се  $h$ -рефлексијом у односу на њу  $h$ -тачка  $A$  слика у центар апсолуте  $O$ . Конструишимо  $h$ -праву  $a'$  која је слика  $h$ -праве  $a$  при  $h$ -рефлексији у односу на  $h$ -праву  $l$  (слика еуклидске праве или круга при еуклидској инверзији). Дакле,  $h$ -рефлексијом у односу на  $h$ -праву  $l$  пресликали смо  $h$ -тачку  $A$  у центар апсолуте  $O$  и  $h$ -праву  $a$  у  $h$ -праву  $a'$  и тиме смо проблем свели на онај који уметмо да решимо. Дакле, конструишимо  $h$ -праву  $n'$  која садржи  $h$ -тачку  $O$  и управна је на  $h$ -правој  $a'$  као у првом случају. С обзиром на то да су  $h$ -рефлексије инволуције, поновном применом  $h$ -рефлексије у односу на  $h$ -праву  $l$  сликамо  $h$ -тачку  $O$  и  $h$ -праву  $a'$  у  $h$ -тачку  $A$  и  $h$ -праву  $a$ , а пошто је и изометрија, њеном применом на  $h$ -праву  $n'$  добићемо  $h$ -праву  $n$  која садржи  $h$ -тачку  $A$  и нормална је на  $h$ -правој  $a$ , што се и тражило.

**2.** Претпоставимо да се једна од  $h$ -тачака  $A, B$  поклапа с центром ап-

солуте (нека је то, без умањења општости,  $h$ -тачка  $A$ ). У уводном делу смо видели како се конструише  $h$ -права  $s$  таква да се  $h$ -рефлексијом у односу на њу  $h$ -тачка  $B$  слика у центар апсолуте  $A$ . Но, приметимо да та  $h$ -права  $s$  није ништа друго него  $h$ -симетрала  $h$ -дужи  $AB$ , па њу треба конструисати.

Претпоставимо сада да се  $h$ -тачке  $A, B$  разликују од центра апсолуте  $O$ . Конструишимо  $h$ -симетралу  $l$   $h$ -дужи  $OA$  и означимо са  $B'$  слику  $h$ -тачке  $B$  при  $h$ -рефлексији у односу на  $h$ -праву  $l$  (слика тачке при еуклидској инверзији). Дакле,  $h$ -рефлексијом у односу на  $h$ -праву  $l$  пресликали смо  $h$ -тачке  $A, B$  у центар апсолуте  $O$  и  $h$ -тачку  $B'$  и тиме смо проблем свели на онај који умемо да решимо. Дакле, конструишимо  $h$ -симетралу  $s'$   $h$ -дужи  $OB'$ . Поновном применом  $h$ -рефлексије у односу на  $h$ -праву  $l$  сликамо  $h$ -тачке  $O, B'$  у  $h$ -тачке  $A, B$ , а  $h$ -симетралу  $s'$   $h$ -дужи  $OB'$  у  $h$ -симетралу  $h$ -дужи  $AB$ .

**3.** Претпоставимо да се  $h$ -тачка  $X$  поклапа с центром апсолуте. Тада се  $h$ -круг  $k$  чији је  $h$ -центар  $h$ -тачка  $X$  и садржи  $h$ -тачку  $Y$  поклапа с еуклидским кругом  $k(X, XY)$ . (Заиста,  $h$ -круг  $k$  представља геометријско место тачака које су  $h$ -осносиметричне  $h$ -тачки  $Y$  у односу на  $h$ -праве прамена правих које садрже  $h$ -тачку  $X$ , а пошто се  $h$ -рефлексије у односу на те  $h$ -праве поклапају с еуклидским осним рефлексијама, следи да је  $h$ -круг  $k$  поклапа с еуклидским кругом  $k(X, XY)$ .)

Претпоставимо сада да се  $h$ -тачка  $X$  разликује од центра апсолуте  $O$ . Конструишимо  $h$ -симетралу  $l$   $h$ -дужи  $OX$  и означимо са  $Y'$  слику  $h$ -тачке  $Y$  при  $h$ -рефлексији у односу на  $h$ -праву  $l$ . Дакле,  $h$ -рефлексијом у односу на  $h$ -праву  $l$  пресликали смо  $h$ -тачке  $X, Y$  у центар апсолуте  $O$  и  $h$ -тачку  $Y'$  и тиме смо проблем свели на онај који умемо да решимо. Дакле, конструишимо  $h$ -круг  $k'$  чији је  $h$ -центар  $h$ -тачка  $O$  и садржи  $h$ -тачку  $Y'$ . Поновном применом  $h$ -рефлексије у односу на  $h$ -праву  $l$  сликамо  $h$ -тачке  $O, Y'$  у  $h$ -тачке  $X, Y$ , а  $h$ -круг  $k'$  у  $h$ -круг  $k$  чији је центар  $h$ -тачка  $X$  и садржи  $h$ -тачку  $Y$ .

**4.** Искористимо претходни задатак. Конструишимо  $h$ -круг  $k$  с  $h$ -центром  $A$  који садржи  $h$ -тачку  $B$  и  $h$ -круг  $l$  с  $h$ -центром  $B$  који садржи  $h$ -тачку  $A$ . У пресеку кругова  $k, l$  означимо  $h$ -тачку  $C$ . Тада је  $h$ -троугао  $\triangle ABC$  правилан, јер је  $AC \stackrel{h}{\cong} AB$  и  $BC \stackrel{h}{\cong} BA$  ( $h$ -подударност).

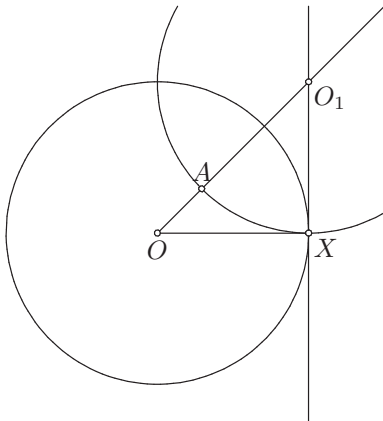
**Напомена 12.** Као и у еуклидској геометрији, у хиперболичкој геометрији важи да се наспрам већег угла у троуглу налази се већа страница, а наспрам подударних углова подударне странице. Према томе, углови правилног троугла у хиперболичкој геометрији јесу подударни. Међутим, с обзиром на то да је збир углова у троуглу мањи од  $180^\circ$ , следи да

су ти углови мањи од  $60^\circ$ ! Према томе, погрешно би било конструисати у било којој од тачака  $A, B$  угао од  $60^\circ$  помоћу тога тражити теме  $C$ , јер се онда неће добити правилан троугао.

5. Означимо са  $S$  пресек датих  $h$ -правих  $p, q$ . Претпоставимо да се  $h$ -тачка  $S$  поклапа с центром апсолуте. Тада су  $h$ -праве  $p, q$  делови еуклидских правих и  $h$ -угао  $\angle pSq$  се поклапа с еуклидским углом  $\angle pSq$ . Конструирајмо еуклидску бисектрису тог угла и она ће бити и тражена  $h$ -бисектриса.

Претпоставимо сада да се  $h$ -тачка  $S$  разликује од центра апсолуте  $O$ . Конструирајмо  $h$ -симетралу  $l$   $h$ -дужи  $OS$  и означимо са  $p', q'$  слике  $h$ -правих  $p, q$  при  $h$ -рефлексији у односу на  $h$ -праву  $l$ . Дакле, свели смо проблем на претходни, који уметмо да решимо, па конструирајмо  $h$ -бисектрису  $s'$   $h$ -угла  $\angle p'Oq'$ . Поновном применом  $h$ -рефлексије у односу на  $h$ -праву  $l$  сликамо  $h$ -праве  $p', q'$  у  $h$ -праве  $p, q$ , а  $h$ -бисектрису  $h$ -угла  $\angle p'Oq'$  у  $h$ -симетралу  $s$   $h$ -угла  $\angle pSq$ .

6.



Потребан нам је  $h$ -угао  $\frac{R}{2}$ , па конструирајмо  $h$ -угао  $\angle pOq$  тако да му теме буде центар апсолуте (тада су му краци делови еуклидских правих). Да бисмо добили  $h$ -дуж  $h$ -мере  $\Pi^{-1}\left(\frac{R}{2}\right)$ , потребна нам је  $h$ -права која је управна на једном  $h$ -краку тог  $h$ -угла (нпр.  $Oq$ ), а  $h$ -паралелна с његовим другим  $h$ -краком (нпр.  $Op$ ). Та  $h$ -права не може садржати центар апсолуте, јер онда неће бити паралелна ни са једном краком угла, па следи да мора припадати еуклидском кругу чији се (еуклидски) центар налази на еуклидској правој која садржи крак  $Oq$ . Тај еуклидски круг мора садржати тачку  $X$  у пресеку апсолуте и полуправе  $Op$  (да би  $h$ -права коју садржи тај круг) била  $h$ -паралелна с  $h$ -краком  $Op$ , а такође мора бити управан на апсолути у тој тачки, па следи да његов центар припада тангенти на апсолути у тачки  $X$ . Дакле, центар  $O_1$  тог круга налази се у пресеку те тангенте и (еуклидске) полуправе  $Oq$ , па конструирајмо круг

$n(O_1, O_1X)$ . Означимо са  $A$   $h$ -тачку у пресеку  $h$ -праве  $n$  и  $h$ -крака  $Oq$ . Тада је  $OA$   $h$ -дуж која је, по дефиницији функције Лобачевског,  $h$ -мере  $\Pi^{-1}(\angle pOq) = \Pi^{-1}\left(\frac{R}{2}\right)$ .

## 7 Стереометрија

У овој области од интереса нам је еуклидска геометрија у простору. Напоменимо дефиниције и тврђења која обавезно морамо имати на уму пре него што почнемо да решавамо задатке.

**Дефиниција 32.** Нека је  $\pi$  раван и  $p$  права која продире ту раван. Кажемо да је права  $p$  *управна* (*нормална*, *ортогонална*) на равни  $\pi$  (и обратно), у ознаци  $p \perp \pi$  и  $\pi \perp p$ , ако је управна на свакој правој  $q$  равни  $\pi$  која садржи продорну тачку равни  $\pi$  и праве  $p$ .

Услов из дефиниције обично није погодан за проверу. Зато користимо следећу теорему.

**Теорема 18** (Коши). *Нека је  $\pi$  раван и  $p$  права која продире ту раван. Ако је права  $p$  управна на двема разним правима равни  $\pi$  које садрже продорну тачку равни  $\pi$  и праве  $p$ , онда је права  $p$  управна на равни  $\pi$ .*

**Теорема 19.** *Нека је  $A$  тачка и  $\pi$  раван. Тада постоји јединствена права  $p$  која садржи тачку  $A$  и управна је на равни  $\pi$ .*

**Теорема 20.** *Нека је  $A$  тачка и  $p$  права. Тада постоји јединствена раван  $\pi$  која садржи тачку  $A$  и управна је на правој  $p$ .*

**Теорема 21** (О трима нормалама). *Ако је права  $p$  нормала из тачке  $O$  на равни  $\pi$  и продире је у тачки  $P$ , а  $Q$  погодног нормале из  $P$  на правој  $q \subset \pi$ , тада је  $OQ \perp q$ .*

**Дефиниција 33.** *Диедарска површ  $\angle \alpha p \beta$  јесте унија полуравни  $p\alpha$  и  $p\beta$  са заједничким рубом  $p$ . Ове полуравни називамо *плоснима* или *сџранама* те диедарске површи, а праву  $p$  њеном *ивицом*.*

Као што угаона линија разлаже раван којој припада на две области, тако и диедарска површ разлаже простор на две области. Унију диедарске површи и неке од тих области називамо *диедром* и означавамо га са  $\angle \alpha p \beta$ . Један од диедара је увек конвексан (представља пресек двају полупростора чији су рубови равни које садрже плосни диедарске површи).

**Теорема 22.** Нека је  $\angle \alpha \rho \beta$  диедарска површ и нека су  $\gamma_1, \gamma_2$  равни које су управне на ивици  $\rho$  те диедарске површи. Тада те равни секу диедарску површ по ујаоним линијама  $\angle a_1 O_1 b_1, \angle a_2 O_2 b_2$  таквим да су улови  $\angle a_1 O_1 b_1, \angle a_2 O_2 b_2$  међусобно подударни.

**Дефиниција 34.** Сваки од углова из претходне теореме назива се *нагибним углом* диедра.

Није тешко приметити да су два диедра међусобно подударна ако и само ако су такви и њихови нагибни углови.

**Дефиниција 35.** Нека је  $\angle \alpha \rho \beta$  диедар. Полураван  $p\gamma$  с рубом  $p$ , која припада диедру  $\angle \alpha \rho \beta$  и дели га на два међусобно подударна диедра  $\angle \alpha \rho \gamma, \angle \gamma \rho \beta$ , назива се *симетралном полуравни* диедра  $\angle \alpha \rho \beta$ .

**Теорема 23.** Нека је  $\angle \alpha \rho \beta$  диедар. Тада је симетрална полураван диедра  $\angle \alpha \rho \beta$  скуп свих тачака  $X$  простора које припадају диедру  $\angle \alpha \rho \beta$  такве да је  $XY = XZ$ , где је  $Y$  подножје управне из  $X$  на полуравни  $p\alpha$ , а  $Z$  подножје управне из  $X$  на полуравни  $p\beta$ .

Дакле, симетрална полураван диедра је уопштење бисектрисе угла.

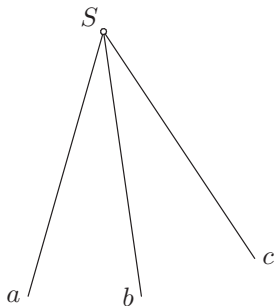
**Дефиниција 36.** Диедар је *прав* ако је његов нагибни угао прав.

Сличне дефиниције имамо за оштар и туп диедар.

**Дефиниција 37.** Равни  $\alpha, \beta$  су међусобно *уравне* (нормалне, ортогналне), у ознаци  $\alpha \perp \beta$ , ако садрже плосни правог диедра.

**Теорема 24.** Нека је  $\alpha$  раван и  $p$  права управна на равни  $\alpha$ . Тада је свака раван  $\beta$ , која садржи праву  $p$ , управна на равни  $\alpha$ .

**Дефиниција 38.** Нека су  $Sa, Sb, Sc$  три полуправе у простору са заједничким теменом  $S$  које не припадају истој равни. Тада скуп  $\angle aSb \cup \angle bSc \cup \angle cSa$  називамо *триедром*. Тачку  $S$  називамо *теменом* тог триедра, полуправе  $Sa, Sb, Sc$  његовим *ивицама*, а углове  $\angle aSb, \angle bSc, \angle cSa$  његовим *странама*.



**Дефиниција 39.** Праве  $p, q$  називамо *мимоилазним* правима ако не постоји раван која их садржи.

**Теорема 25.** Нека су  $p, q$  мимоилазне праве. Тада постоји јединствена права  $n$  која је управна и на правој  $p$  и на правој  $q$ .

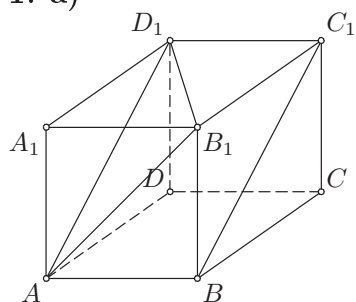
Мимоилазне праве немају заједничних тачака, па стога уџлом између мимоилазних правих  $p, q$  сматрамо угао између било којих двеју правих  $p', q'$  које се секу, таквих да је  $p' \parallel p$  и  $q' \parallel q$ . Према томе, можемо извести следећи закључак.

**Теорема 26.** Ако је права  $n$  управна на равни  $\pi$ , онда је она управна на свакој правој те равни.

**Теорема 27.** Ако је права  $n$  управна на двама непаралелним правима равни  $\pi$ , онда је права  $n$  управна на равни  $\pi$ .

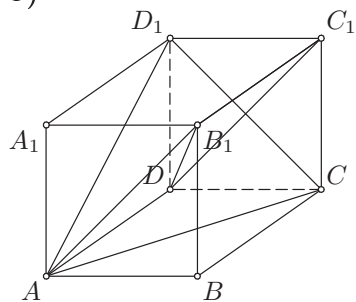
Заиста, ако је права  $n$  управна на двама непаралелним правима  $p, q$  равни  $\pi$ , тада је она управна на правима  $p', q'$  равни  $\pi$  које садрже продорну тачку праве  $n$  и равни  $\pi$  и паралелне су правима  $p, q$ , а пошто праве  $p, q$  нису паралелне, онда су праве  $p', q'$  различите, па тврђење следи на основу Кошијеве теореме.

1. а)



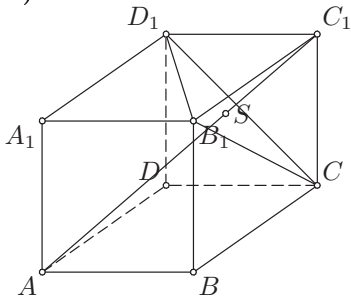
Праве  $AB_1$  и  $BC_1$  су мимоилазне, па је угао између њих једнак углу између правих  $AB_1$  и  $AD_1$ . Троугао  $\triangle AB_1D_1$  је једнакостранични, јер су његове ивице међусобно подударне (све три су подударне дијагонали стране коцке), па је  $\angle B_1AD_1 = 60^\circ$ .

б)



Делује да је права  $CD_1$  управна на равни  $AB_1C_1D$ . Заиста, права  $CD_1$  је управна на правој  $C_1D$  (дијагонале квадрата  $CC_1D_1D$ ), а права  $B_1C_1$  је управна на равни  $CC_1D_1D$ , па је управна на правој  $CD_1$ . Дакле,  $CD_1 \perp C_1D$  и  $CD_1 \perp B_1C_1$ , па је  $CD_1 \perp AB_1C_1D$ . Одавде следи да је  $ACD_1 \perp AB_1C_1D$ , јер раван  $ACD_1$  садржи праву  $CD_1$  која је управна на равни  $AB_1C_1D$ .

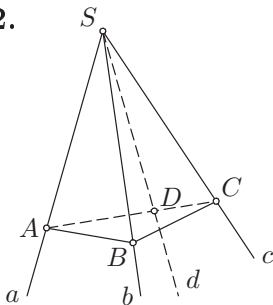
в)



Из доказа претходног дела овог задатка следи да је права  $CD_1$  управна на равни  $AB_1C_1D$ , па је управна на правој  $AC_1$ . Дакле,  $AC_1 \perp CD_1$ . Такође, права  $B_1D_1$  је управна на равни  $ACC_1A_1$ . Заиста,  $B_1D_1 \perp A_1C_1$  (дијагонале квадрата  $A_1B_1C_1D_1$ ), а пошто је  $CC_1 \perp A_1B_1C_1D_1$ , следи да је  $CC_1 \perp B_1D_1$ . Дакле,  $B_1D_1 \perp ACC_1A_1$ , па следи да је  $AC_1 \perp B_1D_1$ . Према томе, из  $AC_1 \perp CD_1$  и  $AC_1 \perp B_1D_1$  следи да је  $AC_1 \perp B_1CD_1$ .

Означимо продорну тачку праве  $AC_1$  и равни  $B_1CD_1$  са  $S$ . Троугао  $\triangle AC_1D_1$  је правоугли с правим углом код темена  $D_1$ , јер је права  $C_1D_1$  управна на равни  $AA_1D_1D$ , па је управна и на правој  $AD_1$ . Права  $D_1S$  припада равни  $B_1CD_1$ , па следи да је  $AC_1 \perp D_1S$ , тј. да је  $D_1S$  висина правоуглог троугла  $\triangle AC_1D_1$ . Троуглови  $\triangle ASD_1$  и  $\triangle D_1SC_1$  су слични (јер имају подударне углове), па следи да је  $\frac{AS}{D_1S} = \frac{SD_1}{SC_1} = \frac{AD_1}{D_1C_1}$ . Ако је  $a$  ивица коцке, онда је  $AD_1 = a\sqrt{2}$  и  $D_1C_1 = a$ , па је  $\frac{AS}{D_1S} = \frac{SD_1}{SC_1} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$ . Следи да је  $\frac{AS}{SC_1} = \frac{AS}{D_1S} \cdot \frac{SD_1}{SC_1} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ , тј.  $AS : SC_1 = 2 : 1$ , што је и требало доказати.

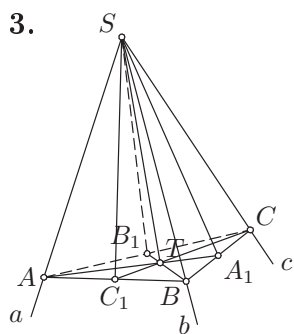
2.



Нека је  $Sabc$  триедар. Треба доказати да је  $\angle aSb + \angle bSc > \angle aSc$ .

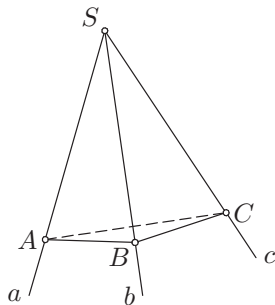
Ако је  $\angle bSc \geq \angle aSc$  неједнакост је тривијално испуњена. Претпоставимо зато да је  $\angle bSc < \angle aSc$  и нека је  $Sd$  полуправа која припада углу  $\angle aSc$  таква да је  $\angle dSc = \angle bSc$ . Нека је  $C$  произвољна тачка полуправе  $Sc$  и нека је  $B$  произвољна тачка полуправе  $Sb$ . Нека је  $D$  тачка полуправе  $Sd$  таква да је  $SD = SB$  и нека је  $A$  пресечна тачка полуправе  $Sa$  и праве  $CD$ . Треуголви  $\triangle SCB$  и  $\triangle SCD$  су подударни, јер је  $SC = SC$ ,  $\angle CSD = \angle CSB$  и  $SD = SB$ . Следи да је  $CD = CB$ . Из једнакости  $AC = AD + DC$ , неједнакости троугла  $AC < AB + BC$  и претходно добијене једнакости  $DC = BC$  следи да је  $AD < AB$ . Треуголви  $\triangle SAB$  и  $\triangle SAD$  имају подударне ивице са заједничким теменом  $S$  ( $SA = SA$  и  $SB = SD$ ), па пошто је  $AB > AD$ , на основу става следи да је  $\angle ASB > \angle ASD$ . Према томе, добијамо да важи

$$\angle aSb + \angle bSc = \angle ASB + \angle BSC > \angle ASD + \angle DSC = \angle ASC = \angle aSc.$$



Нека је  $Sabc$  триедар. Нека  $A$  произвољна тачка полуправе  $Sa$  и нека су  $B, C$  редом тачке полуправих  $Sb, Sc$  такве да је  $SB = SC = SA$ . Тада су троуглови  $\triangle SAB, \triangle SBC, \triangle SAC$  једнакокраки, па следи да су симетрале страница триедра, тј. углова  $\angle ASB, \angle BSC, \angle ASC$ , редом полуправе  $SC_1, SA_1, SB_1$ , где су  $C_1, A_1, B_1$  средишта дужи  $AB, BC, AC$ . Према томе, равни које садрже ивицу триедра и симетралу наспрамне странице јесу равни  $SAA_1, SBB_1, SCC_1$ . С обзиром на то да су  $AA_1, BB_1, CC_1$  тежишне дужи троугла  $\triangle ABC$ , следи да се секу у једној тачки и означимо ту тачку са  $T$ . Према томе, равни  $SAA_1, SBB_1, SCC_1$  садрже тачке  $S, T$ , па стога садрже и праву  $ST$ . Дакле, права  $ST$  је заједничка за све три равни, што је и требало доказати.

4.



Нека је  $Sabc$  триедар такав да је  $\angle aSb = \angle bSc = 45^\circ$  и  $\angle aSc = 60^\circ$ . Треба доказати да је диедар овог триедра, чија ивица садржи полуправу  $Sb$  и чије су плосни полуравни које садрже странице  $\angle aSb$  и  $\angle bSc$  тог триедра, прав диедар. Нека је  $B$  произвољна тачка полуправе  $Sb$  и нека су тачке  $A, C$  редом пресечне тачке равни која је у тачки  $B$  управна на полуправој  $Sb$  и полуправих  $Sa, Sc$ . Следи да треба доказати да је  $\angle ABC = 90^\circ$ .

Означимо  $SB = a$ . Правоугли троуглови  $\triangle SBA, \triangle SBC$  јесу једнакокраки (јер им је један од оштрих углова  $45^\circ$ ), па следи да је  $BA = BC = a$  и  $SA = SC = a\sqrt{2}$ . Троугао  $\triangle SAC$  је једнакокрак (због  $SA = SC$ ) чији је угао при врху  $\angle ASC = 60^\circ$ , па је у питању једнакостранични троугао. Следи да је  $AC = a\sqrt{2}$ , па су странице троугла  $\triangle ABC$  редом  $AB = a, BC = a, AC = a\sqrt{2}$ . Одавде следи да је у питању правоугли троугао, тј. да је  $\angle ABC = 90^\circ$ .

**Дефиниција 40.** Нека је  $AB$  дуж. Раван која садржи средиште  $S$  дужи  $AB$  и управна је на правој  $AB$  назива се *медијалном равни* или *симетралном равни* дужи  $AB$ .

Медијална раван дужи је уопштење медијатрисе дужи. Штавише, важи следеће тврђење.

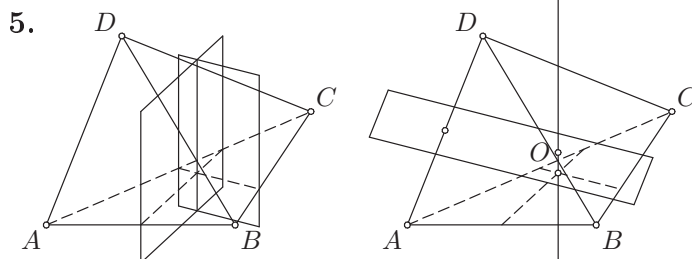
**Теорема 28.** Нека је  $AB$  дуж. Скупи свих тачака  $X$  у простору таквих да важи  $XA = XB$  јесте медијална раван дужи  $AB$ .

Пре него што погледамо решење наредног задатка, споменимо следеће тврђење.

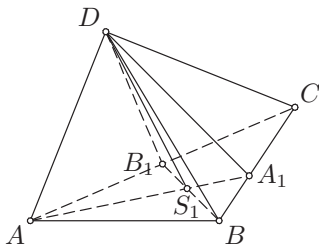
**Теорема 29.** Нека је  $\angle \alpha p \beta$  диедарска површ и нека је  $p\gamma$  полураван с рубом  $p$ . Тада полураван  $p\gamma$  припада диедру  $\angle \alpha p \beta$  ако и само ако за сваке две тачке  $X, Y$  које припадају плоснима  $p\alpha, p\beta$  тој диедра важи да  $p\gamma$  сече дуж  $XY$ .

Ово тврђење је уопштење одговарајућег тврђења за углове у којем полуправа, чије је теме теме угла, припада углу ако и само ако за сваку

дуж чија темена припадају крацима тог угла важи да та полуправа сече ту дуж.

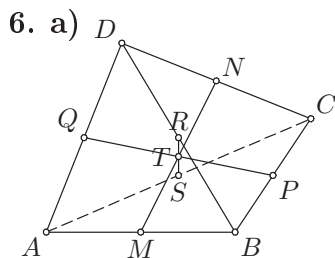


Нека је  $ABCD$  тетраедар. Потребно је доказати да постоји тачка  $O$  таква да је  $OA = OB = OC = OD$ . На основу претходне теореме, та тачка мора припадати медијалним равнима ивица  $AB, BC, AC, AD, BD, CD$  тетраедра  $ABCD$ . За почетак, докажимо да се медијалне равни ивица  $AB, AC$  секу. Ако се оне не би секле, биле би паралелне, па би онда праве  $AB, AC$  биле паралелне, јер су управне на паралелним равнима. Тада би тачке  $A, B, C$  биле колинеарне, што није могуће. Дакле, медијалне равни ивица  $AB, AC$  секу се по правој  $n$  која има особину да за сваку њену тачку  $X$  важи  $XA = XB$  и  $XA = XC$ , па следи да припада медијалној равни ивице  $BC$ . На правој  $n$  треба пронаћи тачку  $O$  такву да је  $OA = OD$ , тј. треба проверити да ли се медијална раван  $\pi$  ивице  $AD$  и права  $n$  секу. Ако то не би био случај, онда би права  $n$  и раван  $\pi$  биле паралелне. У равни  $\pi$  би онда постојала права паралелна правој  $n$ , па пошто је  $\pi \perp AD$ , та права би била управна на  $AD$ , па би било  $n \perp AD$ . Међутим, све праве које садрже тачку  $A$  и управне су на правој  $n$  припадају равни која садржи тачку  $A$  и управна је на правој  $n$ , а то је раван  $ABC$ , па би следило да права  $AD$  припада тој равни, тј. да су тачке  $A, B, C, D$  компланарне, што није могуће. Дакле, раван  $\pi$  и права  $n$  се секу у тачки  $O$ . Пошто тачка  $O$  припада равни  $\pi$ , следи да је  $OA = OD$ , а пошто припада правој  $n$ , следи да је  $OA = OB = OC$ , па следи да је тачка  $O$  центар описане сфере.



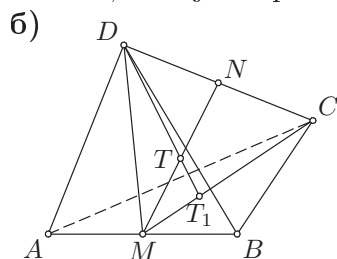
Да бисмо доказали да постоји тачка  $S$  таква да је  $SA_1 = SB_1 = SC_1 = SD_1$ , где су  $A_1, B_1, C_1, D_1$  редом подножја управних из тачке  $S$  на странама  $BCD, ACD, ABD, ABC$  тетраедра  $ABCD$ , потребно је на

основу теореме 23. доказати да постоји тачка  $S$  која припада свим симетралним полуравнима диедара чије су пљосни стране тог тетраедра. Симетрална полураван диедра чија је ивица  $AD$  и симетрална полураван диедра чија је ивица  $BD$  имају заједничку тачку  $D$ , па се секу по правој  $n$  која садржи ту тачку  $D$ . Свака тачка  $X$  праве  $n$  има особину да је  $XC_1 = XB_1$  и  $XC_1 = XA_1$ , где су  $C_1, B_1, A_1$  редом подножја управних из  $X$  на странама  $ABD, ACD, BCD$  тетраедра  $ABCD$ , па следи да права  $n$  припада и симетралној полуравни диедра чија је ивица  $CD$ . Штавише, права  $n$  продире раван  $ABC$  у тачки која припада унутрашњости троугла  $\triangle ABC$ . Заиста, симетрална полураван диедра чија је ивица  $AD$  сече ивицу  $BC$  тетраедра  $ABCD$ , јер тачка  $B$  припада једној пљосни, а тачка  $C$  другој пљосни тог диедра. Означимо ту пресечну тачку са  $A_1$ . Слично, симетрална полураван диедра чија је ивица  $BD$  сече ивицу  $AC$  тетраедра  $ABCD$ , јер тачка  $A$  припада једној пљосни, а тачка  $C$  другој пљосни тог диедра. Означимо ту пресечну тачку са  $B_1$ . Праве  $AA_1, BB_1$  припадају унутрашњости троугла  $\triangle ABC$ , па следи да се секу у тачки  $S_1$  која припада унутрашњости троугла  $\triangle ABC$ . Уочимо симетралну раван диедра чија је ивица  $AB$ . Тачка  $D$  припада једној, а тачка  $S_1$  припада другој пљосни тог диедра, па на основу теореме 23 следи да та симетрална раван сече дуж  $DS_1$  у тачки  $S$ . Та тачка је управо тражени центар уписане сфере тетраедра  $ABCD$ .



Нека је  $ABCD$  тетраедар и нека су  $M, N, P, Q, R, S$  редом средишта ивица  $AB, CD, BC, AD, BD, AC$ . Треба доказати да се дужи  $MN, PQ, RS$  секу у једној тачки која их све полови. Дуж  $MQ$  је средња линија троугла  $\triangle ABD$ , па следи да је  $MQ \parallel BD$  и  $MQ = \frac{1}{2}BD$ . Слично, дуж  $PN$  је средња линија троугла  $\triangle BCD$ , па следи да је  $PN \parallel BD$  и  $PN = \frac{1}{2}BD$ . Дакле,  $MQ \parallel PN$  и  $MQ = PN$ , па закључујемо да су тачке  $M, P, N, Q$  компланарне и да је четвороугао  $MPNQ$  паралелограм. Према томе, његове дијагонале  $MN, PQ$  имају заједничко средиште, које ћемо означити са  $T$ . Дуж  $PR$  је средња линија троугла  $\triangle BCD$ , па следи да је  $PR \parallel CD$  и  $PR = \frac{1}{2}CD$ . Такође, дуж  $SQ$  је средња линија троугла  $\triangle ACD$ , па следи да је  $SQ \parallel CD$  и  $SQ = \frac{1}{2}CD$ . Дакле,  $PR \parallel SQ$  и  $PR = SQ$ , па закључујемо да су тачке  $P, R, Q, S$  компланарне и да је четвороугао  $PRQS$

паралелограм. Према томе, његове дијагонале  $PQ, RS$  имају заједничко средиште. С обзиром на то да је тачка  $T$  средиште дужи  $PQ$ , а дуж има јединствено средиште, следи да је тачка  $T$  заједничко средиште дужи  $PQ, RS$ . Према томе, све три дужи имају заједничку тачку  $T$  која их полови, што је и требало доказати.

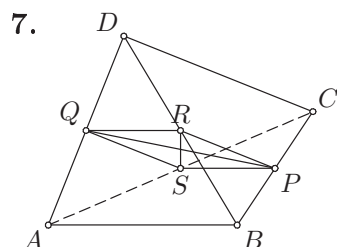


Нека је  $T_1$  тежиште троугла  $\triangle ABC$ . Треба доказати да су тачке  $D, T, T_1$  колинеарне и да је  $DT : TT_1 = 3 : 1$ . Уочимо раван  $MCD$ . Та раван садржи тачку  $N$  јер она припада дужи  $CD$ , па садржи и тачку  $T$ , јер је она средиште дужи  $MN$ . Такође, та раван садржи тачку  $T_1$  јер она припада дужи  $CM$ . Да бисмо доказали колинеарност тачака  $D, T, T_1$ , применимо Менелајеву теорему на троугао  $\triangle MCN$ . Пошто је  $\frac{\overrightarrow{MT_1}}{\overrightarrow{T_1C}} \cdot \frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{ND}} \cdot \frac{\overrightarrow{DT}}{\overrightarrow{TM}} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{1}\right) \cdot \frac{1}{1} = -1$ , следи да су тачке  $D, T, T_1$  колинеарне. Применимо поново Менелајеву теорему, али сада на троугао  $\triangle DT_1C$  и колинеарне тачке  $M, T, N$ . Следи да је

$$-1 = \frac{\overrightarrow{DT}}{\overrightarrow{TT_1}} \cdot \frac{\overrightarrow{T_1M}}{\overrightarrow{MC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CN}}{\overrightarrow{ND}} = \frac{\overrightarrow{DT}}{\overrightarrow{TT_1}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1},$$

па је  $\frac{\overrightarrow{DT}}{\overrightarrow{TT_1}} = 3$ , тј.  $DT : TT_1 = 3 : 1$ , што је и требало доказати.

**Дефиниција 41.** Тачка  $T$  из претходног задатка назива се *тежиштем* тетраедра.

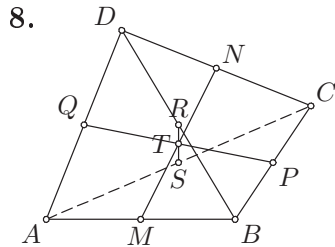


Нека је  $ABCD$  тетраедар и нека су  $P, Q, R, S$  редом средишта ивица  $BC, AD, BD, AC$ .

а) Треба доказати да важи  $AB = CD$  ако и само ако важи  $PQ \perp RS$ . Из доказа претходног задатка имамо да је  $PQRS$  паралелограм, као и

да је  $PS = \frac{1}{2}AB$ ,  $PR = \frac{1}{2}CD$ . Према томе, важи  $AB = CD$  ако и само ако важи  $PS = PR$ , а пошто је  $PQRS$  паралелограм, ово важи ако и само ако је тај паралелограм ромб. Коначно, паралелограм је ромб ако и само ако су му дијагонале међусобно управне, тј. ако и само ако важи  $PQ \perp RS$ .

б) Треба доказати да важи  $AB \perp CD$  ако и само ако важи  $PQ = RS$ . Из доказа претходног задатка имамо да је  $PQRS$  паралелограм, као и да је  $PS \parallel AB$ ,  $PR \parallel CD$ . Према томе, важи  $AB \perp CD$  ако и само ако важи  $PS \perp PR$ , а пошто је  $PQRS$  паралелограм, ово важи ако и само ако је тај паралелограм правоугаоник. Коначно, паралелограм је правоугаоник ако и само ако су му дијагонале међусобно подударне, тј. ако и само ако важи  $PQ = RS$ .

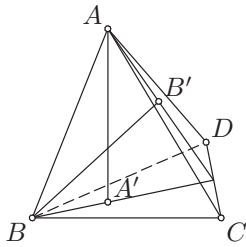


Нека су  $M, N, P, Q, R, S$  редом средишта ивица  $AB, CD, BC, AD, BD, AC$  тетраедра  $ABCD$ . Претпоставимо да је  $RS$  заједничка нормала страница  $AC, BD$ . Пошто је  $PN \parallel BD$  и  $MP \parallel AC$ , следи да је  $RS \perp PN, MP$ , па је  $RS$  управна на равни паралелограма  $MPNQ$ . Према томе,  $RS$  је управна на  $MN, PQ$ , па су паралелограми  $MSNR$  и  $PRQS$  ромбови. Следи да је  $MS = MR$  и  $PS = PR$ . Пошто је  $MS = \frac{1}{2}BC$ ,  $MR = \frac{1}{2}AD$ , добијамо  $BC = AD$ , а пошто је  $PS = \frac{1}{2}AB$ ,  $PR = \frac{1}{2}CD$ , следи да је  $AB = CD$ .

Обрнуто, претпоставимо да је  $AB = CD$  и  $BC = AD$ . Тада је  $MS = MR$  и  $PS = PR$ . Следи да су паралелограми  $MSNR$  и  $PRQS$  ромбови, па је  $MN \perp SR$  и  $PQ \perp RS$ . Дакле,  $RS$  је управна на правима  $MN, PQ$  равни  $MNPQ$ , па је управна на тој равни. Специјално,  $RS$  је управна на  $MP, PN$ . Пошто је  $MP \parallel AC$  и  $PN \parallel BD$ , следи да је  $RS \perp AC$  и  $RS \perp BD$ .

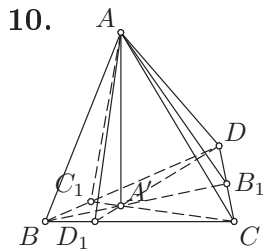
**Дефиниција 42.** Тетраедар  $ABCD$  је *ортоћоналан* ако важи  $AB \perp CD, BC \perp AD, AC \perp BD$ .

9.



Нека се висине  $AA'$ ,  $BB'$  секу. Тада постоји раван  $\pi$  која их садржи. Висина  $AA'$  је управна на равни  $BCD$ , па је  $AA' \perp CD$ , а висина  $BB'$  је управна на равни  $ACD$ , па је  $BB' \perp CD$ . Према томе,  $CD \perp \pi$ , па је  $CD$  управна на свакој правој равни  $\pi$ . Специјално, управна је на правој  $AB$ , тј. важи  $CD \perp AB$ .

Обратно, нека је  $AB \perp CD$ . Нека је  $\pi$  раван која садржи тачке  $A, A', B$ . Висина  $AA'$  је управна на равни  $BCD$ , па је управна и на  $CD$ . Следи да је  $CD$  управна на равни која садржи праве  $AA', AB$ , тј. на равни  $\pi$ . Висина  $BB'$  је управна на равни  $ACD$ , па је управна на правој  $CD$ . Пошто је  $\pi$  раван која садржи тачку  $B$  и управна је на правој  $CD$ , следи да висина  $BB'$  мора припадати равни  $\pi$ , јер све праве које садрже тачку  $B$  и управне су на правој  $CD$  припадају равни  $\pi$ . Према томе, висине  $AA', BB'$  припадају равни  $\pi$ . Оне не могу бити паралелне, јер би тада равни  $BCD, ACD$ , које су управне на њима, биле паралелне, па би се поклапале, што би значило да су тачке  $A, B, C, D$  компланарне, а то није могуће. Према томе, висине  $AA', BB'$  припадају једној равни и нису паралелне, па следи да се секу.



Нека је  $A'$  подножје висине из темена  $A$  на страни  $BCD$ . Претпоставимо да је  $A'$  ортоцентар троугла  $\triangle BCD$ . Тада је  $BA' \perp CD$ , а пошто је и  $AA' \perp CD$ , следи да је права  $CD$  управна на равни која садржи тачке  $A, A', B$ . Према томе, следи да је  $CD$  управна на свакој правој те равни, па специјално и на правој  $AB$ . Слично,  $DA' \perp BC$ , а пошто је и  $AA' \perp BC$ , следи да је права  $BC$  управна на равни која садржи тачке  $A, A', D$ . Према томе, следи да је  $BC$  управна на свакој правој те равни, па специјално и на правој  $AD$ . Такође,  $CA' \perp BD$ , а пошто је и  $AA' \perp BD$ , следи да је права  $BD$  управна на равни која садржи тачке  $A, A', C$ . Према томе, следи да је  $BD$  управна на свакој правој

те равни, па специјално и на правој  $AC$ . Дакле, доказали смо да важи  $AB \perp CD, BC \perp AD, AC \perp BD$ , па је тетраедар  $ABCD$  ортогоналан.

Обрануто, нека је тетраедар  $ABCD$  ортогоналан. Тада је  $AB \perp CD, BC \perp AD, AC \perp BD$ . Права  $AA'$  је управна на равни  $BCD$ , па следи да је  $AA' \perp BC, CD, BD$ . Дакле, имамо да је права  $BC$  управна на правима  $AA', AD$  па је управна на равни која их садржи и на свакој правој те равни, па специјално на правој  $DA'$ . Према томе, права  $DA'$  је висина троугла  $\triangle BCD$ . Слично, права  $CD$  управна на правима  $AA', AB$  па је управна на равни која их садржи и на свакој правој те равни, па специјално на правој  $BA'$ . Према томе, права  $BA'$  је висина троугла  $\triangle BCD$ . Висине  $DA', BA'$  троугла  $\triangle BCD$  секу се у тачки  $A'$  која је управо ортоцентар тог троугла, што је и требало доказати.