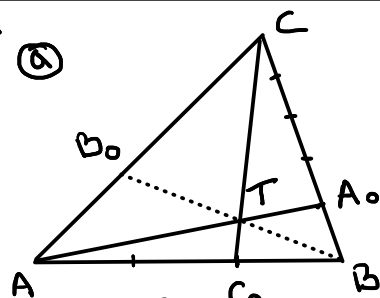


1. На страницама BC и AB троугла ABC дате су редом тачке A_0 и C_0 , такве да је $CA_0 = 4BA_0$ и $AB = 3C_0B$.
- а) [6п] Ако је тачка T пресек правих AA_0 и CC_0 , изразити вектор $\vec{AT}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$.
- б) [2п] Ако је B_0 тачка праве AC таква да се праве AA_0 , BB_0 и CC_0 секу у једној тачки, одредити $\frac{AC}{CB_0}$.



а) A, T, A_0 колинеарне $\Rightarrow (\exists \alpha) \vec{AT} = \alpha \vec{AA_0}$
 C, T, C_0 колинеарне $\Rightarrow (\exists \beta) \vec{CT} = \beta \vec{CC_0}$ ТРЕБА ИЗРАЧУНАТИ САМО ЈОШ α

$\vec{CA_0} = 4\vec{BA_0} \xrightarrow{1.4} \vec{AA_0} = \frac{1}{5}\vec{AC} + \frac{4}{5}\vec{AB}$
 $\vec{AC_0} = 2\vec{C_0B} \xrightarrow{1.4} \vec{CC_0} = \frac{1}{3}\vec{CA} + \frac{2}{3}\vec{CB}$

$\vec{AC} = \vec{AT} + \vec{TC} = \alpha \vec{AA_0} - \beta \vec{CC_0} = \frac{\alpha}{5}\vec{AC} + \frac{4\alpha}{5}\vec{AB} - \frac{\beta}{3}\vec{CA} - \frac{2\beta}{3}\vec{CB}$
 $\Rightarrow \vec{AC} = (\frac{\alpha}{5} + \frac{\beta}{3} + \frac{2\beta}{3})\vec{AC} + (\frac{4\alpha}{5} - \frac{2\beta}{3})\vec{AB}$
 $\Rightarrow (\frac{\alpha}{5} + \beta - 1)\vec{AC} + (\frac{4\alpha}{5} - \frac{2\beta}{3})\vec{AB} = \vec{0}$, $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ лчн. нез

$\Rightarrow \frac{\alpha}{5} + \beta - 1 = 0 \Rightarrow \alpha + 5\beta = 5$ $\cdot 2 \Rightarrow 2\alpha + 10\beta = 10$
 $\frac{4\alpha}{5} - \frac{2\beta}{3} = 0 \Rightarrow 12\alpha - 10\beta = 0$ $\cdot 1 \Rightarrow 12\alpha - 10\beta = 0$
 $\Rightarrow \alpha = \frac{5}{7}$

$\Rightarrow \vec{AT} = \frac{5}{7}\vec{AA_0} = \frac{5}{7}(\frac{1}{5}\vec{AC} + \frac{4}{5}\vec{AB}) = \frac{1}{7}\vec{AC} + \frac{4}{7}\vec{AB}$

б) AA_0, BB_0, CC_0 конкурентне $\xrightarrow{\text{Чеба}} \frac{AC_0}{C_0B} \cdot \frac{BA_0}{A_0C} \cdot \frac{CB_0}{B_0A} = 1 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{CB_0}{B_0A} = 1$

$\Rightarrow \vec{CB_0} = 2\vec{B_0A} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{AB_0} + \vec{B_0C} = -\frac{1}{2}\vec{CB_0} - \vec{CB_0} = -\frac{3}{2}\vec{CB_0} \Rightarrow \frac{AC}{CB_0} = \frac{3}{2}$ БЕЗ МИНУСА!

2. [8п] Дате су праве $p: \begin{cases} x+2z-7=0, \\ y+3z-5=0, \end{cases}$ и $q: \frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2}$.

Одредити праву l која пролази кроз тачку $L(2, 2, -2)$ и сече праве p и q .

$x = -2t + 7$
 $p: y = -3t + 5, t \in \mathbb{R} \Rightarrow P(7, 5, 0) \in p$
 $z = t$

$\vec{P} = (-2, -3, 1)$
 $Q(-2, 1, -3) \in q$
 $\vec{Q} = (-3, 2, -2)$

$L(2, 2, -2) \in l$ и нека је $\vec{e} = (a, b, c)$

1) l сече $p \Leftrightarrow 0 = [\vec{e}, \vec{P}, \vec{P}] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -2 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -9a + 9b + 9c \Rightarrow -a + b + c = 0$

2) l сече $q \Leftrightarrow 0 = [\vec{e}, \vec{Q}, \vec{Q}] = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -3 & 2 & -2 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -4a + 5b + 11c = 0$

$-a + b + c = 0 \quad \cdot (-4) \Rightarrow -4a + 4b + 4c = 0$
 $-4a + 5b + 11c = 0 \quad \cdot (-1) \Rightarrow 4a - 5b - 11c = 0$
 $\Rightarrow b + 7c = 0 \Rightarrow b = -7c$
 $\Rightarrow a = -6c$

$\Rightarrow \vec{e} = (-6c, -7c, c) \parallel (6, 7, -1) \Rightarrow l: \frac{x-2}{6} = \frac{y-2}{7} = \frac{z+2}{-1}$

3. [9п] Свести криву другог реда $3x^2 + 8xy + 9y^2 + 2x - y + 1 = 0$ на канонски облик изометријском трансформацијом и написати формуле те трансформације. Која крива је у питању? Одредити координате жиже/жижа те криве.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 9 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 11 = (\lambda-1)(\lambda-11) = 0$
 $\Rightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 11$

$$(B-E) \varphi = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a+4b=0 \\ 4a+8b=0 \end{cases} \Rightarrow a=-2b \Rightarrow \varphi_1 = (-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$$

$$(B-11E) \varphi = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -8a+4b=0 \\ 4a-2b=0 \end{cases} \Rightarrow b=2a \Rightarrow \varphi_{11} = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{U}' : \frac{3}{5}(-2x'+y')^2 + \frac{8}{5}(-2x'+y')(x'+2y') + \frac{9}{5}(x'+2y')^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}(-2x'+y') - \frac{1}{\sqrt{5}}(x'+2y') + 1 = 0$$

$$\mathcal{U}' : \frac{3}{5}(4x'^2 - 4x'y' + y'^2) + \frac{8}{5}(-2x'^2 - 3x'y' + 2y'^2) + \frac{9}{5}(x'^2 + 4x'y' + 4y'^2) - \frac{4}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' - \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 1 = 0$$

$$\mathcal{U}' : x'^2 + 11y'^2 - \sqrt{5}x' + 1 = 0 \Rightarrow \mathcal{U}' : (x' - \frac{\sqrt{5}}{2})^2 + 11y'^2 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ y'' = y' \end{cases} \Rightarrow \mathcal{U}'' : x''^2 + 11y''^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\mathcal{U}'' : \frac{x''^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y''^2}{\frac{1}{44}} = 1}$$

ФОРМУЛЕ : $\begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y' = -\frac{2}{\sqrt{5}}x'' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'' - 1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' = \frac{1}{\sqrt{5}}x'' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'' + \frac{1}{2} \end{cases}$ еллипса $a^2 = \frac{1}{4}$ $b^2 = \frac{1}{44}$
 $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{10}{44} = \frac{5}{22}$

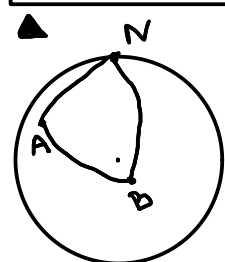
$$\Rightarrow F_1(-\frac{2}{\sqrt{22}} - 1, \frac{1}{\sqrt{22}} + \frac{1}{2}), F_2(\frac{2}{\sqrt{22}} - 1, -\frac{1}{\sqrt{22}} + \frac{1}{2})$$

4. [9п] Одредити једначину кружног конуса $\mathcal{K}$ чија је оса права $o : \frac{x-1}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$, врх тачка $V(1, -6, -4)$ и садржи тачку $S(0, -1, 0)$. Шта је пресек конуса $\mathcal{K}$ и равни $\alpha : x + 2y + z + 15 = 0$?

1) VS изводница и нека је $\varphi = \angle(O, VS)$, $\vec{VS} = (-1, 5, 4)$
 $\Rightarrow \cos \varphi = \frac{|\vec{O} \cdot \vec{VS}|}{\|\vec{O}\| \cdot \|\vec{VS}\|} = \frac{14}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{42}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}}$
 $\vec{O} = (0, 2, 1)$
 2) $\mathcal{K} = \{M \mid \angle(O, VM) = \varphi = \text{const}\}$ јер све изводнице граде исти угао са осом код кружног кон.
 $M(x, y, z) \in \mathcal{K}$ произв. $\Rightarrow \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{15}} = \cos \varphi = \frac{|(0, 2, 1) \cdot (x-1, y+6, z+4)|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z+4)^2}}$
 $\Rightarrow \boxed{\mathcal{K} : 14[(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z+4)^2] = 3(2y + z + 16)^2}$

$\mathcal{K} \cap \alpha : \text{из } \alpha \Rightarrow 2y + z = -x - 15 \rightarrow 14[(x-1)^2 + (y+6)^2 + (z+4)^2] = 3(1-x)^2$
 $\Rightarrow 11(x-1)^2 + 14(y+6)^2 + 14(z+4)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{K} \cap \alpha = \{V(1, -6, -4)\}}$

5. [6п] На астероиду B612, ког можемо посматрати као сферу полупречика $R = 1312m$, Мали принц се налази на тачки $A(30^\circ N, 105^\circ W)$, док је на тачки $B(45^\circ S, 15^\circ E)$ кренуло да ниче семе баобаба. Одредити приближно растојање које је потребно да пређе Мали принц како би стигао до баобаба и почупао га.



претп. да је $R=1$ и нека је N северни пол. $\varphi_B = -45^\circ$
 $\Rightarrow N : \varphi_N = 90^\circ, \theta_N = \text{недеф}$, $A : \varphi_A = 30^\circ, \theta_A = -105^\circ$, $B : \varphi_B = -45^\circ, \theta_B = 15^\circ$
 КОСИНУСНА ТЕОРЕМА ЗА СФЕРНИ ТРОУГАО $\triangle ABN$
 $\Rightarrow \cos \widehat{AB} = \cos \widehat{NA} \cos \widehat{NB} + \sin \widehat{NA} \sin \widehat{NB} \cos \widehat{ANB}$
 $\widehat{NA} = \varphi_N - \varphi_A = 60^\circ, \widehat{NB} = \varphi_N - \varphi_B = 135^\circ, \widehat{ANB} = |\theta_A - \theta_B| = 120^\circ$
 $\Rightarrow \cos \widehat{AB} = \cos 60^\circ \cos 135^\circ + \sin 60^\circ \sin 135^\circ \cos 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{-1}{2}$
 $\cos \widehat{AB} = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{8} = -\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{8}$
 КАКО ЈЕ $R = 1312m$, ПРИМЕТОМ ХОМОТЕТИЈЕ $\Rightarrow \boxed{AB = 1312 \arccos(-\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{6}}{8}) m}$ ПОТРЕБНО ЈЕ ДА МАЛИ ПРИНЦ ПРЕЂЕ