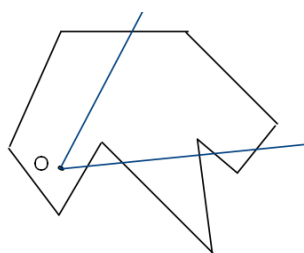


6. Полигонска површ

У овој лекцији посматрамо **прост и раван** полигон p .

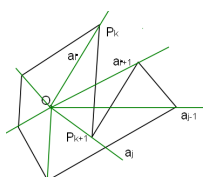


Циљ је да уочимо да такав полигон разлаже раван на две области, од којих ћемо једну назвати унутрашњошћу а другу спољашњошћу. Рећи ћемо да тачка X припада унутрашњости ако произвољна полуправа са теменом X сече полигон у непарном броју тачака.

Теорема

Нека су a и b две полуправе равни π полигона p , са заједничким теменом $O \notin p$, које при том не садрже ни једно теме полигона p . Тада су бројеви $k(a)$ и $k(b)$ пресечних тачака тих полуправих са p , исте парности.

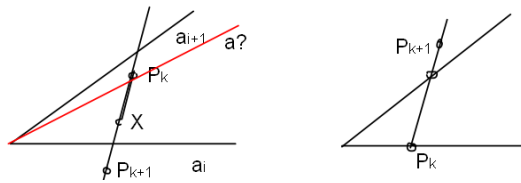
Доказ.



Полуправих са теменом O које садрже темена полигона p има коначно много. Оне разлажу раван π на углове $\angle a_1 a_2, \angle a_2 a_3, \dots, \angle a_n a_1$ (*). Ако је $P_k P_{k+1}$ ивица полигона, $P_k \in a_i$,

$P_{k+1} \in a_j$, тада $P_k P_{k+1}$ припада **конвексном** углу $\angle a_i a_j$. Ако су $a_{i+1}, \dots, a_{j-1}$ полуправе које припадају том конвексном углу, онда су и $a_i a_{i+1}, \dots, a_{j-1} a_j$ конвексни, а при том $P_k P_{k+1}$ има заједничке тачке само са њима.

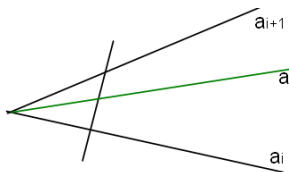
Зато само конвексни углови садрже тачке ивица полигона.



Ако нека унутрашња тачка X ивице $P_k P_{k+1}$ припада углу (конвексном) $\angle a_i a_{i+1}$ онда та ивица сече обе полуправе a_i , a_{i+1} , где може и теме ивице да припада краку. Заиста, ако тако не би било, нпр. не сече полуправу a_i тада су тачка X и једно теме P_k у истој области повезаности у односу на угаону линију $a_i a_{i+1}$ (повезани су једном дужи која не сече угаону линију). Зато би и теме P_k припадало том углу, а онда би постојала и полуправа a_i , $P_k \in a_i$ која припада том углу, те (*) не би било разлагање равни.

Полуправе a и b припадају неким од ових углова. Сад можемо размотрити три различита случаја.

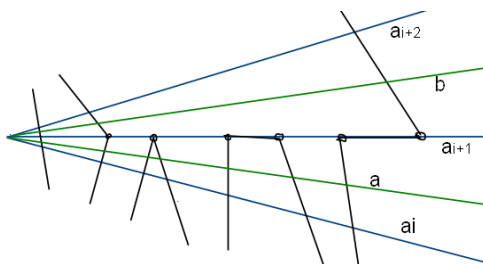
a и b припадају истом углу $a_i a_{i+1}$.



Ако a сече неку ивицу, та ивица сече краке a_i , a_{i+1} те добијамо отворену дуж чија темена припадају крацима конвексног угла. Тада b сече ту дуж, јер припада датом углу. Дакле a и b секу исте ивице полигона. $k(a) = k(b)$.

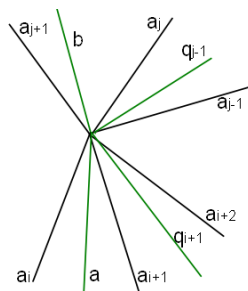
a и b припадају суседним угловима $a_i a_{i+1}$ и $a_{i+1} a_{i+2}$. Ако a сече неку ивицу полигона, та ивица има унутрашње тачке у $a_i a_{i+1}$ и стога сече полуправе a_i и a_{i+1} .

Тада се остварује једна од 5 могућности са слике:



Дакле, бројеви пресека $k(a)$ и $k(b)$ се разликују за паран број.

a и b припадају несуседним угловима $a_i a_{i+1}$ и $a_j a_{j+1}$.



Нека су $a_{i+1} a_{i+2}, \dots, a_{j-1} a_j$ углови из разлагања (*). Нека су $q_{i+1}, q_{i+2}, \dots, q_{j-1}$ полуправе које им редом припадају. Тада је $k(a) \equiv k(q_{i+1}) \equiv k(q_{i+2}) \dots \equiv k(q_{j-1}) \equiv k(b)$. $\square$

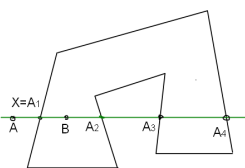
Дефиниција

Уколико полуправа са теменом $O \notin p$, која не садржи темена полигона p , има са p непарно много тачака, онда је O **унутар** p , а иначе је **изван** p . Скуп сви тачака унутар p је **унутрашњост**, а свих тачака изван p је **спољашњост** p .

Теорема

Унутрашњост и спољашњост полигона p су непразни скупови.

Доказ.



Нека је X тачка полигона p која није његово теме. Нека је $l, X \in l$ права која не садржи ни једно теме полигона p . Права l сече p у коначно много тачака. Ако постоје бар три пресечне тачке онда се тај скуп може линеарно уредити, тј. важи $B(A_1, \dots, A_n)$.

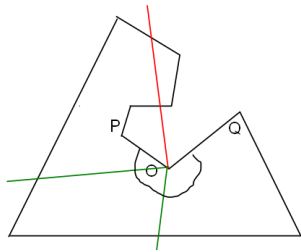
Ако је $X = A_i \neq A_1, A_n$ онда постоје тачке A и B такве да је $B(A_{i-1}, A, X, B, A_{i+1})$. Ако је $X = A_1$ онда постоје тачке A и B т.д. $B(A, X, B, A_2)$. Дакле, број пресечних тачака полуправих праве l са теменима A , односно B које садрже A_{i+1} се разликују за један, па је један од њих паран, а други непаран. Зато једна од тачка A, B припада унутрашњости, а друга спољашњости. Слично се показује за $X = A_n$ или за $n \leq 2$. $\square$

Може се показати:

- ако постоји полигонска линија која повезује две тачке и не сече полигон p , онда су те две тачке или обе унутар или обе изван p . Дакле, тачка из унутрашњости и тачка из спољашњости нису у истој класи еквиваленције повезивости парова тачака;
- и унутрашњост и спољашњост полигона p су повезани ликови. Дакле, "цела" унутрашњост припада једној класи еквиваленције, исто то важи и за спољашњост. Закључак је да је релација повезивости парова тачака релација еквиваленције са две класе: унутрашњошћу и спољашњошћу.

Дефиниција

Унутрашњост простог, равног полигона p је **отворена полигонска површ**, означавамо је (p) , а p је њен **руб**. Унија отворене полигонске површи и њеног руба је **затворена полигонска површ**, $[p]$.



Нека су P, O, Q три узастопна темена полигонске површи. Угаона линија $\angle POQ$ разлаже раван полигона на два отворена угла α и α' . Може се показати: ако једна **отворена** полуправа са теменом O која припада углу α и не садржи ни једно теме полигона има са полигоном непарно много заједничких тачака, онда то важи за сваку такву полуправу угла α .

Тада је тај угао α **унутрашњи** угао полигонске површи, а уколико је конвексан, њему **напоредни** угао је **спољашњи** угао.

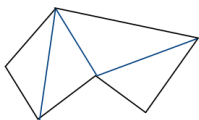
Дефиниција

Дијагонала је дуж чија су темена несуседна темена полигона. Дијагонала полигонске површи (p) чије су све тачке унутар p је **унутрашња**.

Свака полигонска површ са бар четири темена има бар једну унутрашњу дијагоналу.

Дефиниција

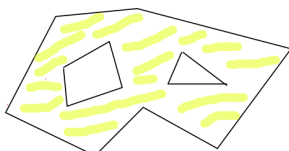
Разлагање неког лика на троугаоне површи је **триангулација** тог лика.



Постоји триангулација произвољне полигонске површи (са бар четири темена) њеним **унутрашњим дијагоналама**.

Дефиниција

Нека су $[p_1], [p_2], \dots, [p_{n-1}]$ дисјунктне полиг. површи које припадају полиг. површи (p). Геометријски лик $(p) \setminus ([p_1] \cup [p_2] \cup \dots \cup [p_{n-1}])$ је **отворена n -повезана** полигонска површ. $p \cup p_1 \cup \dots \cup p_{n-1}$ је њен руб, а унија отворене n -повезане полиг. површи и њеног руба је **затворена n -повезана полиг. површ**.



За n -повезане полигонске површи се дефинишу појмови и важе тврђења аналогна оним за полигонске површи.