

2. Аксиоме распореда

Друга група аксиома су аксиоме **распореда**, има их 6. Оне описују један од основних појмова, трочлану релацију B . Називамо је релацијом **између**, а $B(A, B, C)$ читамо: "тачка B је између тачака A и C ".

II1: Ако је $B(A, B, C)$ онда су A, B, C три разне **колинеарне** тачке.

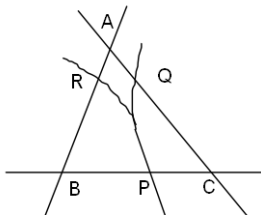
II2: Ако је $B(A, B, C)$ онда је и $B(C, B, A)$.

II3: Ако је $B(A, B, C)$ онда није $B(A, C, B)$.

II4: Ако су A и B две разне тачке, онда постоји тачка C таква да је $B(A, B, C)$.

II5: Ако су A, B, C три разне колинеарне тачке, тада важи **бар** једна од релација $B(A, B, C)$, $B(B, C, A)$, $B(C, A, B)$.

II6: (Пашова аксиома) Ако су A, B, C три **неколинеарне** тачке и p права која припада равни њима одређеној, не садржи тачку A и сече праву BC у тачки P таквој да је $B(B, P, C)$, онда важи **бар** један од исказа:



- p сече праву CA у тачки Q т.д. је $B(C, Q, A)$,

- p сече праву AB у тачки R т.д. је $B(A, R, B)$.

Уочимо да на основу II4 за две дате тачке A и B , постоји C_1 "иза" B , затим, иза B и C_1 постоји C_2 , ... Дакле, сада већ постоји бесконачно много тачака, а процес је пребројивог карактера.

Теорема (2.1)

Ако су A , B , C три разне колинеарне тачке онда важи **тачно** једна од релација $B(A, B, C)$, $B(B, C, A)$, $B(C, A, B)$.

Доказ. На основу $II5$ важи бар једна од датих релација, можемо претпоставити да је нпр. $B(A, B, C)$.

Покажимо да тада не важе преостале две релације.

Тада, због $II3$ није $B(A, C, B)$, а затим, због $II2$, није ни $B(B, C, A)$.

Претпоставимо да важи и $B(C, A, B)$. Тада, на основу $II3$ није $B(C, B, A)$, па због $II2$ није $B(A, B, C)$. $\downarrow$ □

Карактеризација неког појма је услов еквивалентан његовој дефиницији, тј. неопходан и довољан услов који треба важи да би се радило о траженом појму.

Пеанови ставови су карактеризације тачака праве, равни и простора.

Теорема (2.2 Први Пеанов став)

Ако су A и B две разне тачке, тада тачка X припада правој AB акко се поклапа са A или B или важи нека од три релације $B(A, B, X)$, $B(A, X, B)$, $B(X, A, B)$. БД

Теорема (2.3)

Ако су A, B, C три неколинеарне тачке и P, Q, R такве да важи $B(B, P, C)$, $B(C, Q, A)$, $B(A, R, B)$, онда су P, Q, R неколинеарне тачке.

Доказ. ППС (претпоставимо супротно). Нека су P, Q, R колинеарне. Није тешко показати да су P, Q, R разне тачке. Зато постоји распоред међу њима, нпр. нека је $B(R, P, Q)$. Лако се показује и да су A, R, Q неколинеарне.

Теорема

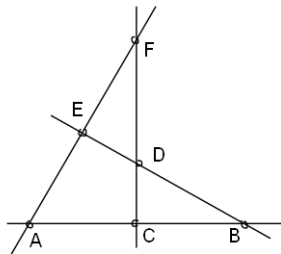
Ако су A, B, C три неколинеарне тачке и p права која припада равни њима одређеној, не садржи тачку A и сече праву BC у тачки P таквој да је $B(B, P, C)$, онда важи **тачно** један од исказа: $-p$ сече праву CA у тачки Q т.д. је $B(C, Q, A)$, $-p$ сече праву AB у тачки R т.д. је $B(A, R, B)$.

БД

Теорема (2.4)

Ако су A и B две разне тачке тада постоји тачка C таква да важи $B(A, C, B)$.

Доказ.



С обзиром да постоје неколинеарне тачке, постоји тачка D која не припада правој AB . Како је $B \neq D$, на основу *II4* постоји E т.д. $\mathcal{B}(B, D, E)$. Слично за $A \neq E$ постоји тачка F т.д. $\mathcal{B}(A, E, F)$.

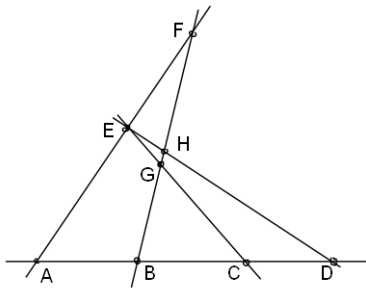
Посматрајмо тројку неколинеарних тачака A, B, E и праву FD . FD сече EB у тачки D т.д. $\mathcal{B}(B, D, E)$. При том сече AE у тачки F т.д. $\neg\mathcal{B}(A, F, E)$. Зато, на основу Пашове аксиоме FD сече AB у некој тачки C т.д. $\mathcal{B}(A, C, B)$. □

Сада, између A и B постоји C_1 , између A и C_1 постоји $C_2, \dots$ добијамо пребројив скуп тачака, "свуда густ".

Теорема

Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(B, C, D)$ онда је и $\mathcal{B}(A, B, D)$.

Доказ.



С обзиром на распореде који важе, тачке A и D припадају правој BC те су све четири тачке колинеарне. Постоји тачка E која не припада тој правој и тачка F таква да важи $B(A, E, F)$.

Прво, посматрајмо тројку неколинеарних тачака A, C, E и праву FB . FB сече AC у тачки B т.д. $B(A, B, C)$.

При том, сече AE у F т.д. $\neg \mathcal{B}(A, F, E)$. На основу Пашове аксиоме тада FB сече EC у тачки G т.д. $\mathcal{B}(E, G, C)$.

Посматрајмо тројку неколинеарних тачака E, C, D и праву FB . FB сече EC у тачки G т.д. $\mathcal{B}(E, G, C)$ и при том сече CD у тачки B т.д. $\neg \mathcal{B}(C, B, D)$. Зато FB сече ED у тачки H т.д. $\mathcal{B}(E, H, D)$.

Посматрајмо тројку неколинеарних тачака A, D, E и праву FB . Права FB сече ED у тачки H т.д. $\mathcal{B}(E, H, D)$ и при том сече AE у F т.д. $\neg \mathcal{B}(A, F, E)$. Зато, FB сече AD у тачки између A и D , а при том већ имамо да AD сече FB у B , Стога важи $\mathcal{B}(A, B, D)$. □

Дефиниција

Конечан скуп колинеарних тачака $A_1, \dots, A_n$, $n \geq 3$ је **линеарно уређен**, пишемо $\mathcal{B}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ако важи $\mathcal{B}(A_i, A_j, A_k)$, $1 \leq i < j < k \leq n$.

Теорема (2.5)

Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(B, C, D)$ онда је $\mathcal{B}(A, B, C, D)$

Доказ. По дефиницији треба да важи $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(A, B, D)$, $\mathcal{B}(A, C, D)$ и $\mathcal{B}(B, C, D)$. Два распореда су дата по претпоставци, а да тада важи и $\mathcal{B}(A, B, D)$ смо доказали. Распоред $\mathcal{B}(A, C, D)$ се слично доказује. □

Слично можемо показати:

Т. $\mathcal{B}(A, B, C)$ и $\mathcal{B}(A, C, D) \Rightarrow \mathcal{B}(A, B, C, D)$;

Т. $\mathcal{B}(A, B, C)$, $\mathcal{B}(A, B, D)$ и $C \neq D \Rightarrow \mathcal{B}(A, B, C, D)$ или $\mathcal{B}(A, B, D, C)$;

Т. $\mathcal{B}(A, C, B)$, $\mathcal{B}(A, D, B)$ и $C \neq D \Rightarrow \mathcal{B}(A, D, C, B)$ или $\mathcal{B}(A, C, D, B)$.