

АФИНА И ЕУКЛИДСКА ГЕОМЕТРИЈА

задачи за вежбе

- Одредити барицентар тачака A , B и C ако су њихове масе редом $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$.
- Одредити барицентар тачака A , B и C ако су њихове масе редом 1 , 1 , -1 .
- Ако је $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $x \in \mathbb{F}^n$ и $b \in \mathbb{F}^m$ онда је решење система $Ax = b$ афини потпростор од $\mathbb{F}^n$.
- Ако је $\mathcal{A} = \mathbb{V}_a f$ афинизација векторског простора $\mathbb{V}$ над пољем $\mathbb{K}$, доказати да је скуп $\Pi = \{\alpha u + (1 - \alpha)v : \alpha \in \mathbb{K}\}$ најмањи афини потпростор од $\mathcal{A}$ који садржи дате тачке u и v .
- Доказати да два тротеменика (A, B, C) и (P, Q, R) у афином простору над пољем имају исто тежиште ако и само ако је $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{CR} = 0$.
- Ако су P, Q, R тим редом барицентри пондерисаних тачака (B, α) и (C, β) , (C, α) и (A, β) , (A, α) и (B, β) , доказати да тачке A, B, C и P, Q, R имају исто тежиште.
- Нека су A и B фиксирани тачке и Π потпростор афиног простора $\mathcal{A}$. Ако је T_P тежиште тачака A, B, P тада је и скуп $\Gamma = \{T_P : P \in \Pi\}$ један потпростор од $\mathcal{A}$.
- Применом теорије о барицентрима доказати да се тежишне дужи троугла секу у тачки која их дели у односу $2 : 1$.
- Ако су $\Pi = A + \mathbb{U}$ и $\Gamma = B + \mathbb{W}$ било који потпростори афиног простора $\mathcal{A}$ и $B = A + v$, директриса афиног омотача $\langle \Pi \cup \Gamma \rangle$ њихове уније је сума потпростора $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ и $\Omega(v)$.
- Ако афини потпростори $\Pi = A + \mathbb{U}$ и $\Gamma = B + \mathbb{W}$ имају бар једну заједничку тачку, доказати да је тада $\dim \langle \Pi \cup \Gamma \rangle = \dim \Pi + \dim \Gamma - \dim (\Pi \cap \Gamma)$.
- Ако две разне равни Π и Γ у афином простору $\mathcal{A}$ димензије 3 имају бар једну заједничку тачку, доказати да њихов пресек $\Pi \cap \Gamma$ мора бити права. Да ли то важи ако је $\dim \mathcal{A} = 4$?
- У четвородимензионалном простору одредити међусобни положај равни $\alpha : x_1 + x_2 + 1 = 0$, $x_3 - x_4 = 0$ и равни $\beta : x_1 = 1 + t, x_2 = 2 + s, x_3 = t - 2s, x_4 = 1 + t - s, t, s \in \mathbb{R}$.
- Испитати међусобни положај афиних потпростора $\Pi = (0, -1, 6, 1) + \Omega((1, 0, -1, 0))$ и $\Gamma : 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 1$.
- Нека је Π афини омотач тачака $A(1, 1, 1, 1)$, $B(2, 2, 0, 0)$ и $C(1, 2, 0, 1)$, а Γ афини омотач тачака $D(1, 1, 1, 2)$ и $E(1, 1, 2, 1)$. Одредити узајамни положај Π и Γ и растојање између Π и Γ .
- Ако су $(4, 3), (5, 4), (2, 2)$ и (x, y) координате тачака A, B, C и M у односу на дати репер $O_{e_1 e_2}$ афине равни $\mathcal{A}$, прво доказати да је (A, B, C) једна афина база те равни, а затим одредити и барицентричне координате уочене тачке M у односу на ту базу.
- Ако су (x_r, y_r, z_r) координате тачака A_r у односу на дати репер $O_{e_1 e_2 e_3}$ афиног простора $\mathcal{A}$ димензије 3, доказати да су тачке A_0, A_1, A_2, A_3 компланарне ако и само ако је
$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & x_2 - x_0 & x_3 - x_0 \\ y_1 - y_0 & y_2 - y_0 & y_3 - y_0 \\ z_1 - z_0 & z_2 - z_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$
- Чевина и Менелајева теорема.
- Ако је S фиксирана тачка афиног простора $\mathcal{A}$ и α фиксиран скалар, доказати да је са $\pi : M \mapsto N$, где је N тачка за коју је $\overrightarrow{SN} = \alpha \overrightarrow{SM}$ дефинисано и једно афино пресликавање $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$.
- Ако су A и B две разне тачке простора $\mathcal{A}$ и α, β фиксирани скалари, тада је пресликавање задато помоћу $M \mapsto \alpha A + \beta B + (1 - \alpha - \beta)M$ или транслација или хомотетија.
- Ако су η и δ хомотетије са средиштима P и Q и коефицијентима α и β , њихова композиција је или транслација (за $\alpha\beta = 1$), или хомотетија (за $\alpha\beta \neq 1$). У првом случају то је транслација за вектор $a = (1 - \alpha)\overrightarrow{QP}$, а у другом хомотетија чије је средиште R одређено са $\overrightarrow{QR} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha\beta}\overrightarrow{QP}$.
- Доказати да две хомотетије η и δ у афиној групи простора $\mathcal{A}$ комутирају ако и само ако имају заједничко средиште хомотетије.
- Доказати да је композиција две централне симетрије транслација и одредити њен вектор.
- Ако је η хомотетија са средиштем P и π било која трансформација из афине групе $\mathbb{GA}$ простора $\mathcal{A}$, доказати да је тада и $\theta = \pi \circ \eta \circ \pi^{-1}$ хомотетија са средиштем $Q = \pi(P)$.
- Доказати да је у односу на фиксирани репер $O_{e_1 e_2 e_3}$ афиног простора $\mathcal{A}$ који је димензије 3 помоћу формула $x' = 1 - x - y - 2z, y' = -3 + 6x + 4y + 6z, z' = 1 - 2x - y - z$ дефинисано пројектовање тог простора, а затим одредити његову основу и директрису.

25. Ако је $O_{e_1 e_2 e_3}$ дати репер афиног простора $\mathcal{A}$, одредити формуле паралелног пројектовања $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ на раван $\Pi : 2x - y + z - 2 = 0$, паралелно правој $\Gamma = \langle A, u \rangle$ где је A тачка са координатама $(-1, 0, 1)$ и $u = e_1 + 2e_2 + e_3$.
26. Нека је у четвородимензионалном простору $\mathcal{A}$ дата хиперраван $\Pi : x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 3$ и тачка $M(3, -1, -2, -1)$. Одредити формуле:
а) дилатације чија је основа Π и тачка M се слика у тачку $M'(\frac{3}{2}, 2, 4, 2)$.
б) трансвекције чија је основа Π и тачка M се слика у тачку $M'(1, 0, -3, -2)$.
27. Одредити формуле неке трансвекције којом се паралелограм $ABCD$ слика на неки квадрат, ако су координате темена $A(-1, -1), B(1, -1), C(3, 1)$ и $D(1, 1)$.
28. Одредити формуле афине трансформације којом се елипса $\epsilon : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$ слика у круг $k : x^2 + y^2 = a^2$.
29. Нека је Π елипса која садржи средишта P, Q, R страница BC, CA, AB неког троугла ABC равни $\mathbb{E}^2$. Ако она праве BC, CA, AB , тим редом, сече у тачкама X, Y, Z , тада се праве AX, BY, CZ секу у једној тачки, нпр H , и важи: $HS : ST = 3 : 1$ (S - центар елипсе, T - тежиште троугла ABC).
30. Ако је елипса Σ уписана у полигон $A_1, A_2, \dots, A_n$, доказати да за додирне тачке P_r страница $A_r A_{r+1}$ важи

$$\|\overrightarrow{A_1 P_1}\| \cdot \|\overrightarrow{A_2 P_2}\| \cdot \dots \cdot \|\overrightarrow{A_n P_n}\| = \|\overrightarrow{P_1 A_2}\| \cdot \|\overrightarrow{P_2 A_3}\| \cdot \dots \cdot \|\overrightarrow{P_n A_1}\|.$$

31. Нека је $\chi : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ хипербола и $P \in \chi$ произвољна тачка. Доказати да постоји афино пресликавање којим се хипербола χ слика на хиперболу $\chi' : x'y' = 1$ при коме се тачка P слика у тачку $P'(1, 1)$.
32. У $\mathbb{R}^4$ одредити праву l такву да $M \in l$ где $M(0, 1, 2, 3)$ и $l \perp p$ где је $p : \frac{x_1-1}{2} = \frac{x_2-2}{1} = \frac{x_3-3}{2} = \frac{x_4-4}{1}$ и $l \cap q \neq \emptyset$ где је права $q : \frac{x_1+1}{3} = \frac{x_2+1}{2} = \frac{x_3+3}{1} = \frac{x_4-7}{0}$ и угао између правих l и r је $\arccos(\frac{1}{6})$ где је права $r : x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.
33. Нека је пресликавање f дато помоћу формуле $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Доказати да је пресликавање f изометрија, одредити основне компоненте те изометрије и скицирати пут једне тачке.
34. Трансформација равни је дата формулама $x' = 1 - y$ и $y' = 2 - x$. Доказати да је ова трансформација изометрија, одредити њене основне компоненте и скицирати пут једне тачке.
35. Одредити у координатама формуле клизајуће рефлексije ако је оса права $y = x$ а вектор $\vec{a} = (3, 3)$.
36. Доказати да је пресликавање задато помоћу $x' = 1 - z, y' = -x$ и $z' = y - 2$ изометрија и одредити њене основне компоненте.
37. Дата је трансформација f помоћу $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Доказати да је то сличност, наћи њене компоненте и скицирати путању једне тачке.