

Математика 1

— Задаци за вежбе —

Октобар 2021

1 Увод

1.1. Упростити изразе:

а) $\left(\frac{1}{a-3b} - \frac{1}{a+3b} + \frac{6b}{a^2-9b^2}\right) : \frac{b(2a+b)}{a^2-9b^2}$

б) $\left(\frac{1}{x+\frac{1}{y+z}} : \frac{1}{x+\frac{1}{y}}\right) - \frac{1}{y\left(\frac{xy}{z}+x+\frac{1}{z}\right)}$

ц) $\frac{a^{-2}+b^{-2}}{a^{-1}+b^{-1}} \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^{-1} : \frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^2-b^2}$

д) $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}+\sqrt{x}}\right)^{-2} - \left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right)^{-2}$

1.2. Испитати када су обе стране израза дефинисане, а потом доказати да у тим случајевима важе идентитети:

а) $\frac{2x^2-2x+1}{x^2-x} + \frac{x}{1-x} \equiv 1 - \frac{1}{x}$

б) $\frac{1}{a^2+2a+1} - \frac{a^2+a}{a^3-1} \cdot \left(\frac{1}{a^2-a} - \frac{a}{1-a^2}\right) \equiv -\frac{4a}{a^4-2a^2+1}$

ц) $\left(\sqrt{a(1-a)} + \sqrt{\frac{a^3}{1-a}}\right) : \left(\frac{1}{1+\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{1-a}\right) \equiv \sqrt{a-a^2}$

д) $\left(x\sqrt{\frac{x}{y}} - y\sqrt{\frac{y}{x}}\right) : \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{xy}} \equiv (x+y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

е) $\left(\frac{x\sqrt{x-y}\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \sqrt{xy}\right) \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}\right)^2 \equiv 1$

1.3. Раставити на просте чиниоце (факторе) полиноме:

а) $P(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 9$

б) $P(x) = (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$

ц) $P(x) = x^4 + 4$

1.4. За које вредности параметара a и b је полином $P(x) = x^4 + ax^3 - 9x^2 + 11x + b$ дељив:

а) биномом $x^2 + 1$

б) триномом $x^2 - 2x + 1$

1.5. Решити системе линеарних једначина:

а) $\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ 3x - y - 4 = 0 \end{cases}$	б) $\begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ -4x + 6y - 2 = 0 \end{cases}$	ц) $\begin{cases} -x + 3y = 1 \\ 2x - 6y = -1 \end{cases}$	д) $\begin{cases} 5x - 8y = -1 \\ x + y = 1 \\ x - 6y = 14 \end{cases}$
--	--	--	---

1.6. Решити једначине:

а) $2x^2 - 7x - 4 = 0$

б) $y^2 - 2y - 24 = 0$

ц) $2x^2 - 5x - 3|x - 2| = 0$

д) $|x^2 + 2x| - |3 - x| = x^2$

1.7. Упростити изразе:

а) $6^{2x+6} - 3^{3x+3} \cdot 2^{x+9}$

б) $6 \cdot 9^{1/x} - 13 \cdot 6^{1/x} + 6 \cdot 4^{1/x}$

ц) $\ln(x+2) - 2\ln(x-3) + \ln(3x-5)$

1.8. Израчунати: $\sin \frac{\pi}{12}$, $\cos \frac{17\pi}{4}$, $\cos(7\pi + \frac{5\pi}{3})$, $\sin(\frac{11\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$, $\sin \frac{15\pi}{2} + 4 \cos 6\pi$

2 Математичка индукција

2.1. Доказати да за све природне бројеве n важе следећи искази

(а) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(ц) $1 + 8 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(б) $1 + 4 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(д) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

2.2. Користећи математичку индукцију доказати да је

(а) $7|2^{n+1} + 3^{2n-1}$

(б) $3|5^n + 2^{n+1}$

(ц) $64|3^{2n+3} + 40n - 27$

3 Комплексни бројеви

3.1. Представити комплексан број у алгебарском запису:

(а) $z = (2-i)(2+i)^2 - (3-2i) + 7$

(ц) $z = \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$

(б) $z = \left(\frac{i^5+2}{i^{15}+1} \right)^2$

(д) $z = \frac{2+4i}{-3+5i}$

3.2. Одредити реални и имагинарни део комплексног броја:

(а) $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ц) $z = \frac{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}}$

(б) $z = \frac{1}{i+1}$

(д) $z = (1+i)^4$

3.3. Представити комплексан број у тригонометријском запису:

(а) $z = -3$

(ц) $z = 1 + i$

(б) $z = -i$

(д) $z = -1 + i\sqrt{3}$

3.4. Одредити модуо и аргумент комплексног броја:

(а) $(-4 + 3i)^3$

(б) $1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$

3.5. Представити комплексан број у алгебарском запису:

(а) $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right)^6$

(е) $z = \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^{12}$

(б) $z = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^{20}$

(ф) $z = e^{\sqrt{2} + \frac{125\pi i}{6}}$

(ц) $z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-3i} \right)^{11}$

(г) $z = e^{\sqrt{5} + 2 - \frac{2\pi i}{3}}$

(д) $z = (-\sqrt{3} - i)^7$

(х) $z = e^{\frac{177\pi i}{4}}$

3.6. Израчунати:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \sqrt[4]{1} & \text{(д)} \sqrt[4]{-1+i} \\ \text{(б)} \sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} & \\ \text{(ц)} \sqrt[3]{i} & \text{(е)} \sqrt[6]{-64} \end{array}$$

3.7. Решити једначине

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} z^4 = 1 - i\sqrt{3} & \text{(б)} z^3 = 1 + \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} & \text{(ц)} z^4 + \frac{1}{1-i} = 0 \end{array}$$

3.8. Представити комплексан број у Ојлеровом запису:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \frac{1+5i}{4-7i} & \text{(ц)} \sqrt{3} + i \\ \text{(б)} \frac{2-i^3}{5-i+4i^2} & \text{(д)} \sqrt{2} + i\sqrt{2} \end{array}$$

4 Криве другог реда

4.1. Наћи полуосе, жиже и ексцентрицитет елипсе

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 & \text{(ц)} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1 \\ \text{(б)} \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1 & \text{(д)} x^2 + 10(y-1)^2 = 10 \end{array}$$

4.2. Наћи полуосе, жиже, ексцентрицитет и асимптоте хиперболе

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \frac{x^2}{16} - y^2 = 1 & \text{(ц)} y^2 - x^2 = 1 \\ \text{(б)} \frac{(x-3)^2}{5} - \frac{(y+2)^2}{2} = 1 & \text{(д)} \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \end{array}$$

4.3. Одредити тангенту на криву из дате тачке

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1, A(2, 7). & \text{(д)} 3x^2 + 4y^2 = 48, A(6, 1). \\ \text{(б)} x^2 + 4y^2 = 20, A(-6, -1). & \\ \text{(ц)} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, A(2, -1). & \text{(е)} \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{4} = 1, A(-3, 1). \end{array}$$

4.4. Наћи жижу, теме и праметар p параболе.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} y^2 = 2x & \text{(ц)} y^2 = -14x \\ \text{(б)} y^2 = 6x - 12 & \text{(д)} y^2 = -5x + 4 \end{array}$$

4.5. Наћи једначине тангенти на параболу $y^2 = 4x$ у пресечним тачкама са правом $p : 2x - 3y + 4 = 0$.

4.6. Одредити хиперболу ако је права $t : 5x - 6y - 8 = 0$ њена тангента, а праве $a_{1,2} : y = \pm \frac{x}{2}$ су њене асимптоте.

4.7. Формулисати и доказати оптичка својства елипсе, хиперболе и параболе. Нацртати слику.

5 Аналитичка геометрија у простору

5.1. Дати су вектори $\vec{a} = p\vec{i} + q\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$. Одредити реалне параметре p и q тако да вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ буду ортогонални, а вектор $\vec{a}$ заклапа угао $\frac{\pi}{3}$ са позитивним делом x -осе.

5.2. Одредити параметар $p \in \mathbb{R}$ такав да вектор $\vec{a} = 2p\vec{i} + \vec{j} + (1-p)\vec{k}$ заклапа једнаке углове са векторима $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ и $\vec{c} = 5\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$.

- 5.3.** Одредити параметар $p \in \mathbb{R}$ такав да вектори $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = p\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{c} = 9\vec{i} + 14\vec{j} + 16\vec{k}$ буду копланарни.
- 5.4.** Испитати да ли су вектори $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ копланарни. Ако јесу, изразити вектор $\vec{c}$ као линеарну комбинацију вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
- 5.5.** Нека су дати вектори $\vec{a} = (-1, 0, 5)$, $\vec{b} = (2, -8, -4)$ и $\vec{c} = (-3, -2, 3)$. Израчунати:
- $\|\frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c}\|$
 - $\vec{a} \times \vec{b}$
 - $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$
 - $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
- 5.6.** Дате су тачке $A(2, 1, 0)$, $B(-1, 3, 3)$ и $D(1, 0, -5)$. Одредити координате тачке C тако да четвороугао $ABCD$ буде паралелограм, а затим израчунати његову површину.
- 5.7.** Да ли су тачке $A(0, 1, -2)$, $B(3, -1, -1)$, $C(4, 0, -5)$ и $D(-2, -4, 0)$ копланарне? Колика је запремина тетраедра $ABCD$?
- 5.8.** Одредити тачку продора праве $p: \frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-5}{-4}$ кроз раван $\alpha: 3x + y - 4z + 5 = 0$.
- 5.9.** У каквом положају стоје праве p и q ?
- $p: x = -1 + 2t, y = 3 - t, z = -5 + 3t, q: x = 2 + s, y = -3 + 4s, z = 3 - 2s, t, s \in \mathbb{R}$
 - $p: \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}, q: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$
 - $p: \begin{cases} x + 5y + z = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{cases}, q: \frac{x+3}{5} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{5}$
- 5.10.** Одредити заједничку нормалу и растојање између мимоилазних правих $p: \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-12}{-1}$ и $q: x = -7t + 3, y = 2t + 1, z = 3t + 1, t \in \mathbb{R}$.
- 5.11.** Одредити једначину равни која садржи тачку $P(5, -2, 1)$ и нормална је на праву $q: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{2}$.
- 5.12.** Одредити једначину праве која садржи тачку $P(5, -2, 1)$ и паралелна је правој $q: \frac{x+4}{-2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{1}$.
- 5.13.** Одредити једначину равни која садржи праву $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{3}$ и нормална је на раван $\alpha: 2x - 4y + z + 5 = 0$.
- 5.14.** Одредити растојање између праве $p: x + 1 = -2y + 6 = 2z + 4$ и равни $\alpha: -x + 3y + 5z - 7 = 0$.
- 5.15.** Написати једначину праве p која садржи тачку $A(1, 1, 1)$ и паралелна је правој BC , где је $B(1, 2, 3)$ и $C(5, 0, 2)$. Одредити реалан параметар λ тако да тачка $D(-3, \lambda + 2, 2)$ припада правој p .
- 5.16.** Одредити једначину равни α која садржи тачке $A(1, 2, 3)$, $B(2, 1, 3)$ и $C(3, 2, 1)$. Одредити затим једначину нормале n из тачке $N(12, 23, 31)$ на раван α .
- 5.17.** Одредити параметар λ тако да се праве $p: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-1}{-2}$ и $q: \frac{x-\lambda}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{0}$ секу, а затим одредити једначину равни α која садржи те две праве.
- 5.18.** Одредити једначину равни α која садржи праву $p: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+8}{-4}$ и нормална је на праву $q: \frac{x+2}{5} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{2}$. Одреди растојање равни α од праве $r: \frac{x-8}{1} = \frac{y+7}{1} = \frac{z-4}{-1}$.

6 Лимеси функција

6.1. Одредити леви и десни лимес функције у датој тачки

(а) $f(x) = \operatorname{sgn} x, x = 0$

(б) $g(x) = \frac{1}{x-3}, x = 3$

(ц) $h(x) = [x], x = 4$

(д) $f(x) = x^2 + 5, x = 3$

(е) $g(x) = \frac{x+2}{x-5}, x = 5$

(ф) $h(x) = [x^2], x = 3$

6.2. Важни лимеси

(а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

(б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

(ц) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

(е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

(ф) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

6.3. Израчунати следеће лимесе

(а) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

(б) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$

(ц) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

(д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$

(е) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$

(ф) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$

(х) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{3}}{\operatorname{tg}^2 2x}$

(и) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x}$

6.4. Израчунати граничне вредности

(а) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$

(б) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{x - a}$

(ц) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{x}$

(д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x(x+2)} - x \right)$

(е) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{x^2}$

(ф) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$

(г) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$

(х) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

6.5. Израчунати граничне вредности

(а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

(б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{\sin x}$

(ц) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2} x}{1 - \sqrt{x}}$

(д) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin^2 x + \sin x - 1}{2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1}$

(е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sqrt{16+x^2} - 4}$

(ф) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x \right)$

(г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-3x+x^3+3x^4}}{(2x + \frac{1}{2})(1-x)}$

7 Извод функције

7.1. Израчунати извод функције (таблични изводи)

(а) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

(д) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x^7}$

(б) $f(x) = \frac{\pi}{x} + \ln 2$

(е) $f(x) = 5 \sin x + 3 \cos x$

(ц) $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$

(ф) $f(t) = \arcsin t + 2$

7.2. Израчунати извод функције (извод производа и количника)

(а) $f(x) = x \operatorname{ctg} x$

(г) $f(t) = 2t \sin t - (t^2 - 2) \cos t$

(б) $f(x) = e^x \cos x$

(х) $f(t) = \frac{t^2}{\ln t}$

(ц) $f(x) = \sin x \ln x 2^x$

(и) $f(x) = x^{-1} + 2 \ln x - \frac{\ln x}{x}$

(д) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+5}$

(ј) $f(z) = z \operatorname{arctg} z$

(е) $f(t) = \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}$

(к) $f(t) = \frac{2}{3t+1} - \frac{2}{t}$

(ф) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

(л) $f(x) = x^7 e^x$

7.3. Израчунати извод функције (извод сложене функције)

(а) $f(x) = \sqrt{x e^x + x}$

(г) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

(б) $f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + (\ln x)^5$

(х) $f(x) = \operatorname{ctg} \arcsin x^2$

(ц) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$

(и) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\cos^3 x}$

(д) $f(x) = \ln^2 x - \ln \ln x$

(ј) $f(x) = x^{x^2}$

(е) $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$

(к) $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

(ф) $f(x) = e^{-x^2} + \sin 3x$

(л) $f(x) = x^{x^x}$

7.4. Израчунати извод имплицитно задате функције $y = y(x)$

(а) $x^2 + y^2 = 1$

(б) $x^2 + 2xy - y^2 = 4x$

(ц) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$

(д) $e^y \sin x + \ln y \cos x = \operatorname{arctg} x$

7.5. Израчунати извод параметарске функције

(а) $x = 2(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t)$

(б) $x = 4 + 2 \cos t, y = -1 + 2 \sin t$

(ц) $x = 5(e^t + e^{-t}), y = 3(e^t - e^{-t})$

7.6. Израчунати парцијалне изводе $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ функције

(а) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$

(б) $f(x, y) = x^y y^x,$

(ц) $f(x, y) = \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2}.$

7.7. Одредити извод у правцу вектора v функције $f(x, y, z)$

(а) $v = (1, 0, -1), f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2},$

(б) $v = (3, -1, 3), f(x, y, z) = e^{2x+3y-z},$

(ц) $v = (1, 1, 1), f(x, y, z) = \ln(x + y + z).$

7.8. Да ли је функција $h(t, x) = e^{-x^2 + c^2 t^2}$ решење диференцијалне једначине $x \frac{\partial h}{\partial t} - c^2 t \frac{\partial h}{\partial x} = 0$?

7.9. Израчунати следећи лимес и објаснити зашто не може да се израчуна применом Лопиталовог правила

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$$

7.10. Израчунати применом Лопиталовог правила

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

(б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin x)}$

(ф) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

(ц) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^6} - 1 + x^6}{\operatorname{arctg} x^{12}}$

(д) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$

(х) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

7.11. Развити у Тејлоров полином у околини $x = 0$ следеће функције

(a) $f(x) = \sin x$

(ц) $f(x) = e^x$

(б) $f(x) = \cos x$

(д) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

7.12. Израчунати применом развоја у Тејлоров полином

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3},$

(ц) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3},$

(б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right),$

(д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}.$

8 Испитвање тока график функције

8.1. Одредити локалне екстремуме функције

(a) $f(x) = x \ln x$

(ц) $f(x) = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

(б) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

(д) $f(x) = 2 \sin 2x + \sin 4x$

8.2. Наћи интервале закривљености и превојне тачке функције

(a) $f(x) = (x+1)^4$

(д) $f(x) = (1+x^2)e^x$

(б) $f(x) = x^2 \ln x$

(ц) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

(e) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

8.3. Наћи асимптоте графика функције

(a) $f(x) = x + \ln x$

(д) $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$

(б) $f(x) = e^{-x^2} + 2$

(e) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$

(ц) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 9}$

(ф) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

8.4. Скицирати график функције

(a) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+1}$

(д) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(б) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

(e) $f(x) = \ln \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

(ц) $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

(ф) $f(x) = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$

$$(\Gamma) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$$

$$(\text{X}) \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$

$$(\text{И}) \quad f(x) = (x - x^2)e^{-x}$$

$$(\text{J}) \quad f(x) = xe^{\frac{1}{x-2}}$$

$$(\text{K}) \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

$$(\text{Л}) \quad f(x) = \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2x^4-2x^2+1}}$$

$$(\text{M}) \quad f(x) = \arctg \frac{x+1}{x}$$

9 Неодређени интеграл

9.1. Израчунати интеграле

$$(\text{a}) \quad \int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$$

$$(\text{б}) \quad \int (6x^2 + 8x + 3) dx$$

$$(\text{ц}) \quad \int (\sin x - \frac{1}{\sin^2 x}) dx$$

$$(\text{д}) \quad \int (5^x + x^5) dx$$

$$(\text{е}) \quad \int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}) dx$$

$$(\text{ф}) \quad \int (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + e^x) dx$$

9.2. Израчунати интеграле (смена променљиве)

$$(\text{a}) \quad \int \frac{dx}{x-a}$$

$$(\text{б}) \quad \int \frac{dx}{(x-a)^n}$$

$$(\text{ц}) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$(\text{д}) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$(\text{е}) \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2}$$

$$(\text{ф}) \quad \int \frac{dx}{x^2-a^2}$$

$$(\text{г}) \quad \int \frac{x}{a^2+x^2} dx$$

$$(\text{х}) \quad \int \frac{x^3}{x^8-2} dx$$

9.3. Израчунати интеграле (смена променљиве)

$$(\text{a}) \quad \int \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$(\text{б}) \quad \int \cos^2 2x dx$$

$$(\text{ц}) \quad \int \sqrt{a^2-x^2} dx$$

$$(\text{д}) \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}} dx$$

$$(\text{е}) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$$

9.4. Израчунати интеграле (парцијална интеграција)

$$(\text{a}) \quad \int x \ln x dx$$

$$(\text{б}) \quad \int x^2 \ln x dx$$

$$(\text{ц}) \quad \int \ln^2 x dx$$

$$(\text{д}) \quad \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$$

$$(\text{е}) \quad \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$(\text{ф}) \quad \int x \sin x dx$$

$$(\text{г}) \quad \int x \cos 3x dx$$

$$(\text{х}) \quad \int e^x \cos x dx$$

$$(\text{и}) \quad \int \arcsin x dx$$

$$(\text{j}) \quad \int x \arctan x dx$$

9.5. Израчунати интеграле (парцијална интеграција)

$$(\text{a}) \quad \int \frac{x}{\sin^2 x} dx$$

$$(\text{б}) \quad \int 3^x \cos x dx$$

$$(\text{ц}) \quad \int x \sin x \cos x dx$$

$$(\text{д}) \quad \int (x^2 - 2x + 5)e^{-x} dx$$

$$(e) \int x^3 e^{-\frac{x}{3}} dx$$

$$(r) \int \sin 2x e^{3x} dx$$

$$(\phi) \int \sin(\ln x) dx$$

$$(x) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

9.6. Израчунати integrale (рационалне функције)

$$(a) \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$$

$$(e) \int \frac{dx}{x^4 + 1}$$

$$(\phi) \int \frac{x}{x^3 - 3x + 2} dx$$

$$(\phi) \int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2}$$

$$(\Pi) \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$

$$(r) \int \frac{x^2 + 1}{x^6 + 1} dx$$

$$(\Delta) \int \frac{dx}{x^3 + 1}$$

$$(x) \int \frac{x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x}{(x-1)^2(x^2+1)} dx$$

9.7. Израчунати integrale (тригонометријске функције)

$$(a) \int \sin^{10} x \cos^3 x dx$$

$$(\Delta) \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx$$

$$(\phi) \int \sin^4 x \cos^2 x dx$$

$$(e) \int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$$

$$(\Pi) \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$$

9.8. Израчунати integrale (неке ирационалне функције)

$$(a) \int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$$

$$(\Pi) \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$$

$$(\phi) \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$$

10. Одредени интеграл и примене интеграла

10.1. Израчунати вредност одређених интеграла

$$(a) \int_0^1 (2x+1)^{50} dx$$

$$(r) \int_1^3 \sqrt{x+1} dx$$

$$(\phi) \int_0^3 \frac{t dt}{t^2 + 1}$$

$$(x) \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$(\Pi) \int_4^1 \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2}$$

$$(и) \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$$

$$(\Delta) \int_0^8 |x^2 - 6x + 8| dx$$

$$(j) \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$(e) \int_0^3 x^2 e^{-x} dx$$

$$(\kappa) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

$$(\phi) \int_1^{e^{2\pi}} \sin \ln t dt$$

$$(\Pi) \int_1^e \ln x dx$$

10.2. Израчунати површину lika у равни, ограниченог кривама

$$(a) y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$$

$$(\Pi) y^2 = x, x - 2y = 3$$

$$(\phi) y = x - 1, y^2 = 2x + 6$$

$$(\Delta) y = \cos x, y = \sin 2x, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$$

(е) $y = |x|$, $y = (x + 1)^2 - 7$, $x = -4$

(ф) $y = x^{-1}$, $y = x^{-2}$, $x = 1$, $x = 2$

(г) $4x + y^2 = 0$, $y = 2x + 4$

(х) $y = x$, $y = x^3$

(и) $y = x^2$, $y = \frac{2}{x^2+1}$

(ј) $y = e^x$, $y = e^{3x}$, $x = 1$

(к) $x^2 + 4y^2 = 4$, $x^2 - y^2 = \frac{1}{4}$

(л) $x^2 + y^2 = 1$, $y = x^2 - 1$, $y = -x$

10.3. Израчунати запремину тела добијеног ротацијом криве

(а) $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$ око x -осе

(б) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$ око y -осе

(ц) $y = x$, $y = x^2$ око x -осе

(д) $y = x$, $y = x^2$ око праве $y = 2$

(е) $y = x^4$, $y = 1$ око праве $y = 2$

(ф) $y = x^2$, $y^2 = x$ око x -осе

(г) $y = 2x - x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, око y -осе

(х) $y = x$, $y = x^2$ око y -осе

10.4. Израчунати дужину криве

(а) $y = \ln(1 - x^2)$, $x \in [0, \frac{1}{2}]$

(б) $y = \sqrt{81 - x^2}$, $x \in [3, 9]$

(ц) $y = 2\sqrt{x}$, $x \in [1, 2]$

(д) $y = \ln \cos x$, $x \in (0, \frac{\pi}{6})$

11 Несвојствени интеграл

11.1. Испитати конвергенцију несвојствених интеграла

(а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

(б) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

(ц) $\int_{-\infty}^0 xe^x dx$

(д) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

11.2. Израчунати вредност несвојствених интеграла

(а) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

(б) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}$