

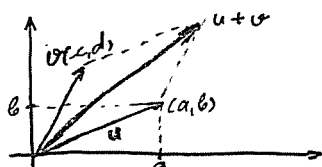
2. ВЕКТОРИ У $\mathbb{R}^n$

2-1.

Скалари - величине које имају само интензитет

Вектори - имају свој интензитет, правцу и смер и представљају се стрелицама.

ми математичари идентификујемо вектор са његовим крајем
ујачицу можемо представити у равни xOy као уређење пар (a, b) реалних
бројева



- СЛАБИРАЊЕ ДВА ВЕКТОРА - до правцу паралелограма

$$u = (a, b)$$

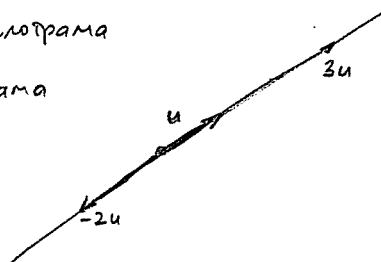
$u+v$ је дијагонала паралелограма

$$v = (c, d)$$

$$u+v = (a+c, b+d)$$

- МНОЖЕЊЕ ВЕКТОРА СКАЛАРОМ $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda u = \lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$



$\mathbb{R}^n$ УОПШТЕЊЕ: уређење n -торке реалних бројева

$a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$, реални бројеви a_i се зову координате вектора a

- два вектора су једнака ако имају исти број координата и ако су одговарајуће координате једнаке

$$u = v \Leftrightarrow u_i = v_i, \quad i=1, n$$

• СЛАБИРАЊЕ: $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$u+v = (u_1+v_1, u_2+v_2, \dots, u_n+v_n)$$

• МНОЖЕЊЕ СКАЛАРОМ: $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda u = (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n)$$

$u+v$ и λu су опет вектори из $\mathbb{R}^n$

$$-u = -1 \cdot u$$

$$u-v = u+(-v)$$

• ОСОБИНЕ: $u, v, w \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u+v \in \mathbb{R}^n \\ (u+v)+w = u+(v+w) \\ u+0 = u \\ u+(-u) = 0 \\ u+v = v+u \end{cases}$$

Затвореност

асоцијативност

неутрал $0 = (0, 0, \dots, 0)$

инверз

комутативност

АКСИОМЕ

ВЕКТОРСКОГ

ПРОСТОРА

$$\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$$

$$(\lambda+\beta)u = \lambda u + \beta u$$

$$(\lambda\beta)u = \lambda(\beta u)$$

$$1 \cdot u = u$$

$$① \quad u = (2, -1, 0, -3)$$

$$v = (1, -1, -1, 3)$$

$$w = (1, 2, -2, 2)$$

$$\text{Наћи } 5u - 3v - 4w.$$

$$(10, -5, 0, -15)$$

$$-(3, -3, -3, 9)$$

$$-(4, 12, -8, 8)$$

$$(3, -14, 11, -32)$$

$$② \quad \text{Одредити } x \text{ и } y \text{ ако је } x \cdot (2, y) = y(1, -2)$$

$$(2x, xy) = (y, -2y)$$

$$\begin{cases} 2x = y \\ xy = -2y \end{cases}$$

$$x \cdot 2x = -2 \cdot 2x$$

$$2x^2 + 4x = 0$$

$$2x(x+2) = 0$$

$$x=0$$

$$y=0$$

$$(0, 0)$$

$$x=-2$$

$$y=-4$$

$$(-2, -4)$$

СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД

$$u, v \in \mathbb{R}^n$$

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$u \circ v \stackrel{\text{деф.}}{=} u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \dots + u_n \cdot v_n$$

За векторе u и v можемо да кажемо да су **ОРТОГОНАЛНИ** ако је њихов скаларни производ 0.

$$u \perp v \Leftrightarrow u \circ v = 0$$

② (НАСТАВАК 1)

$$u \circ v = (2, -1, 0, -3) \circ (1, -1, -1, 3) = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) + (-3) \cdot 3 = -6$$

$$v \circ w = 1 - 3 + 2 + 6 = 6$$

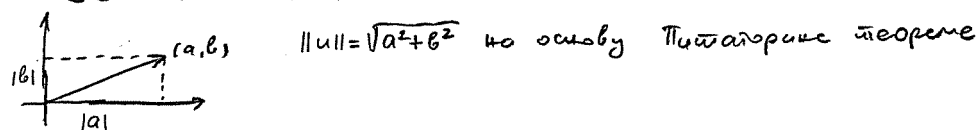
$$u \circ w = 2 - 3 + 0 - 6 = -7$$

НОРМА ВЕКТОРА

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\|u\| \stackrel{\text{деф.}}{=} \sqrt{u \circ u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

- Следицама, $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$



- Вектор зовемо **ЈЕДИНИЧНИМ** ВЕКТОРОМ ако је $\|u\| = 1$

Ако је u било који не нула вектор

$$\hat{u} = \frac{u}{\|u\|} \text{ је јединични}$$

③ (НАСТАВАК 1)

$$u = (2, -1, 0, -3)$$

$$v = (1, -1, -1, 3)$$

$$\|u\| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

$$\|v\| = \sqrt{1+1+1+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\hat{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}, 0, \frac{-3}{\sqrt{14}} \right) \text{ је јединични вектор}$$

④ (КОШИ-ШВАРЦ)

$$|u \circ v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

абсољутна
вредност
дрож

$$\Rightarrow \frac{|u \circ v|}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \frac{u \circ v}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq 1, \text{ по дефиницији } \theta \in [0, \pi] \text{ уг. је}$$



$$\boxed{\cos \theta = \frac{u \circ v}{\|u\| \cdot \|v\|}} \quad \boxed{\theta = \angle(u, v)}$$

Ако је $u \circ v = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ (може се са дефиницијом ортогоналности гледа вектора).

⑤ За које d су вектори u и v ортогонални?

$$u = (2, 3d, -4, 1, 5) \in \mathbb{R}^5$$

$$v = (6, -1, 3, 7, 2d) \in \mathbb{R}^5$$

$$u \circ v = 12 - 3d - 12 + 7 + 10d = 7d + 7$$

$$u \perp v \Leftrightarrow u \circ v = 0$$

$$\Leftrightarrow 7d + 7 = 0$$

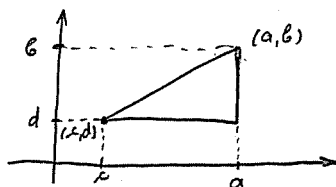
$$\Leftrightarrow \boxed{d = -1}$$

РАСТОЈАЊЕ два вектора

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$



растојање између тачака (a, b) и (c, d)

$$d = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

2. $u = (2, -1, 0, 1)$ $v = (1, 0, -1, -1)$
 $d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{3}$

5. Докажи, че $d(u, v) = 6$

$u = (2, 2, 1, -4)$

$v = (3, -1, 0, -3)$

$$6 = d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(2-3)^2 + (2+1)^2 + (1-0)^2 + (-4+3)^2} = \sqrt{1 + (2+1)^2 + 25 + 1} / 2$$

$$36 = (2+1)^2 + 27$$

$$(2+1)^2 = 9 \quad \sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{(2+1)^2} = 3$$

$$|2+1| = 3$$

$$2+1 = \pm 3 \quad \begin{cases} d=2 \\ d=-4 \end{cases}$$

$(u, v) \in \mathbb{R}$

6. $x + y - 2z + 4t = 5$

$2x + 2y - 3z + t = 3$

$3x + 3y - 4z - 2t = 1$

Скупът от всички решения на хомогенната система е

$$r + W = \{r + L : L \in W\}$$

Где r е едно решение на хомогенната система

W - скупът от всички решения на хомогенната система

НЕХОМОГЕН СИСТЕМ

$x + y - 2z + 4t = 0$

$2x + 2y - 3z + t = 0$

$3x + 3y - 4z - 2t = 0$

$x + y - 2z + 4t = 0$

$z - 7t = 0$

$2z - 14t = 0 \quad / : 2$

$x + y + 2z + 4t = 0$

$z - 7t = 0$

$z - 7t = 0$

$z = 7t$

$z = 7t$

$y = 2z - 4t - x$

$= 2 \cdot 7t - 4t - x$

$y = 10t - x$

4 уравнения
2 j-ици $\rightarrow$ 2 свободни променливи

$x = a, t = b, a, b \in \mathbb{R}$

$W = \{(a, 10b - a, 7b, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$

$W = \{a(1, -1, 0, 0) + b(0, 10, 7, 1) : a, b \in \mathbb{R}\}$ ← скупът от всички решения на хомогенната система

За $a=1, b=0$: $(1, -1, 0, 0)$ база на скупъта
 $a=0, b=1$: $(0, 10, 7, 1)$ решение

Всичко друго решение е линейна комбинация от вектора из база на скупъта.

Решаваме хомогенната система:

$x + y - 2z + 4t = 0 \quad / \cdot (-2)$

$2x + 2y - 3z + t = 0 \quad / \cdot (-3)$

$3x + 3y - 4z - 2t = 0$

$x + y - 2z + 4t = 0$

$z - 7t = -7$

$2z - 14t = -14$

$x + y - 2z + 4t = 0$

$z - 7t = -7$

$t = b, x = a, a, b \in \mathbb{R}$

$z = 7b - 7$

$y = -x + 2z - 4t + 5$

$= -a + 2(7b - 7) - 4b + 5$

$= -a + 10b - 9$

$(x, y, z, t) \in \{(a, -a + 10b - 9, 7b - 7, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \equiv$

$\equiv \{a(1, -1, 0, 0) + b(0, 10, 7, 1) + (0, -9, -7, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$

скупът от всички решения на хомогенната система

← едно решение на хомогенната система (r)
 ← скупът от всички решения на хомогенната система (W)

Def. Вектор v је ЛИНЕАРНА КОМБИНАЦИЈА ВЕКТОРА $u_1, u_2, \dots, u_n$ ако постоје скалари $k_1, k_2, \dots, k_n$ такви да важи

$$v = k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_n u_n$$

↑
коэффициенты линейной комбинации

⑦ Испитати да ли је вектор $v = (1, -2, 5) \in \mathbb{R}^3$ линеарна комбинација вектора

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, -3, 2) \\ u_2 &= (2, -4, -1) \\ u_3 &= (1, -5, 7) \end{aligned}$$

$$(1, -2, 5) = x \cdot (1, -3, 2) + y \cdot (2, -4, -1) + z \cdot (1, -5, 7)$$

$$= (x + 2y + z, -3x - 4y - 5z, 2x - y + 7z)$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -3x - 4y - 5z = -2 \\ 2x - y + 7z = 5 \end{cases} \quad \begin{matrix} / \cdot (-3) \\ + \\ \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 2y - 2z &= 1 \quad / \cdot \frac{5}{2} \\ -5y + 5z &= 3 \quad / \cdot (-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

$0 = 11 \quad \Rightarrow$ систем нема решења
 $\Rightarrow v$ није линеарна комбинација вектора u_1, u_2, u_3

Испитати да ли је v за вектор $w = (1, -1, -3)$

$$(1, -1, -3) = x u_1 + y u_2 + z u_3$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -3x - 4y - 5z = -1 \\ 2x - y + 7z = -3 \end{cases} \quad \begin{matrix} / \cdot (-3) \\ + \\ \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 2y - 2z &= 2 \quad / : 2 \quad y - z = 1 \\ -5y + 5z &= -5 \quad / : (-5) \quad y - z = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= z + 1 \\ x &= 1 - 2y - z \\ &= 1 - 2(z + 1) - z \\ &= -1 - 3z \end{aligned}$$

нпр. за $z = 0 \Rightarrow x = -1 \quad y = 1 \Rightarrow w = -1 u_1 + 1 u_2 + 0 u_3$

Def. Вектори $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ су ЛИНЕАРНО ЗАВИСНИ ако постоје скалари $k_1, k_2, \dots, k_n$ који нису сви нула и где је $k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_n u_n = 0$

⑧ $w = -u_1 + u_2 + 0 \cdot u_3$
 $-u_1 + u_2 + 0 \cdot u_3 + 1 \cdot w = 0 \quad \leftarrow$ Вектори u_1, u_2, u_3, w су линеарно зависни (један од њих је линеарна комбинација осталих)

Def. Вектори $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ су ЛИНЕАРНО НЕЗАВИСНИ ако $k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_n u_n = 0 \Rightarrow k_1 = 0, k_2 = 0, \dots, k_n = 0$

⑧ Испитати да ли су вектори

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 4, -2, 3) \\ u_2 &= (1, 6, -1, 4) \\ u_3 &= (3, 8, -8, 7) \end{aligned}$$

линеарно зависни или линеарно независни.

$$\begin{aligned} x \cdot u_1 + y \cdot u_2 + z \cdot u_3 &= 0 \quad \Rightarrow x = 0, y = 0, z = 0 \\ x \cdot (1, 4, -2, 3) + y \cdot (1, 6, -1, 4) + z \cdot (3, 8, -8, 7) &= (0, 0, 0, 0) \\ (x + y + 3z, 4x + 6y + 8z, -2x - y - 8z, 3x + 4y + 7z) &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} x+y+3z & = & 0 \quad / \cdot (-4) \\ 4x+6y+8z & = & 0 \\ -2x-y-8z & = & 0 \\ 3x+4y+7z & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x+y+3z & = & 0 \\ 2y-4z & = & 0 \quad / :2 \\ y-2z & = & 0 \\ y-2z & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x+y+3z & = & 0 \\ y-2z & = & 0 \end{array}$$

$$\boxed{z=a, a \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{y=2a}$$

$$\begin{aligned} x &= -y-3z \\ &= -2a-3a \end{aligned}$$

$$= -5a$$

$$\boxed{x=-5a}$$

(13)

$$\textcircled{9} \quad u_1 = (1, 1, 1, 1)$$

$$u_2 = (1, 0, 0, 1)$$

$$u_3 = (1, 1, 0, 0)$$

$$x \cdot u_1 + y \cdot u_2 + z \cdot u_3 = 0 \Rightarrow x=y=z=0$$

$$x \cdot (1, 1, 1, 1) + y \cdot (1, 0, 0, 1) + z \cdot (1, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

$$(x+y+z, x+z, x, x+y) = (0, 0, 0, 0)$$

$$x+y+z=0$$

$$x+z=0$$

$$x=0$$

$$x+y=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow \boxed{z=0} \Rightarrow \boxed{y=0}$$

u_1, u_2, u_3 — л.н.з.

(13)

$$\textcircled{10} \quad u_1 = (1, 2, -1, 3)$$

$$u_2 = (2, 5, 1, -1)$$

$$u_3 = (5, 12, 1, 1)$$

$$u_4 = (3, 4, -2, 5)$$

$$xu_1 + yu_2 + zu_3 + tu_4 = 0$$

$$x(1, 2, -1, 3) + y(2, 5, 1, -1) + z(5, 12, 1, 1) + t(3, 4, -2, 5) = (0, 0, 0, 0)$$

$$(x+2y+5z+3t, 2x+5y+12z+4t, -x+y+z-2t, 3x-y+z+5t) = (0, 0, 0, 0)$$

$$x+2y+5z+3t=0 \quad / \cdot (-2)$$

$$2x+5y+12z+4t=0$$

$$-x+y+z-2t=0$$

$$3x-y+z+5t=0$$

$$x+2y+5z+3t=0$$

$$y+2z-2t=0 \quad / \cdot (-3)$$

$$3y+6z+t=0$$

$$-7y-14z-4t=0$$

$$x+2y+5z+3t=0$$

$$y+2z-2t=0$$

$$7t=0 \Rightarrow \boxed{t=0}$$

$$-18t=0$$

$$y=-2z$$

$$\boxed{z=a, a \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{y=-2a}$$

$$x=-2y-5z-3t=-2(-2a)-5a-0=-a$$

$$\boxed{x=-a}$$

при $a=1$

$$\boxed{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=-2 \\ z=1 \\ t=0 \end{array}}$$

u_1, u_2, u_3, u_4 — л.н.з.

11) Угредити вектор нормалан на вектор $u = (5, 3)$ у $\mathbb{R}^2$

$$v = (x, y)$$

$$v \cdot u = 0$$

$$(x, y) \cdot (5, 3) = 0$$

$$5x + 3y = 0$$

$$y = -\frac{5}{3}x$$

$$x = a, a \in \mathbb{R}$$

$$y = -\frac{5}{3}a$$

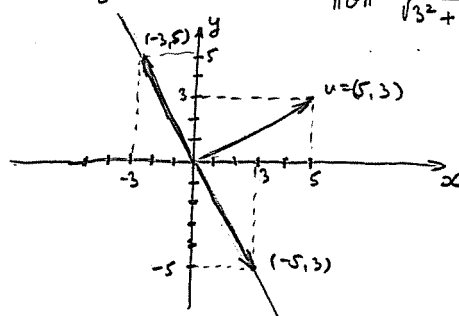
$$v = (0, -\frac{5}{3}a) = a(1, -\frac{5}{3})$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$a=3: v = (3, -5)$$

$$a=-3: v = (-3, 5)$$

$$\text{јер } u \perp v: \hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} (3, -5) = \frac{1}{\sqrt{34}} (3, -5) = (\frac{3}{\sqrt{34}}, -\frac{5}{\sqrt{34}})$$



(12.)

12) Угредити вектор нормалан на векторе $u = (1, 3, 4)$ и $v = (2, 6, -5)$ у $\mathbb{R}^3$.

$$w = (x, y, z)$$

$$w \cdot u = 0$$

$$w \cdot v = 0$$

$$(x, y, z) \cdot (1, 3, 4) = 0$$

$$(x, y, z) \cdot (2, 6, -5) = 0$$

$$x + 3y + 4z = 0 \quad / \cdot (-2)$$

$$2x + 6y - 5z = 0 \quad / \cdot (-1)$$

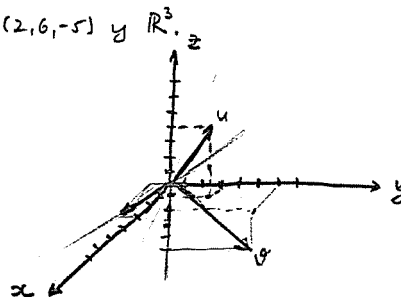
$$x + 3y + 4z = 0$$

$$-13z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$x = -3y$$

$$y = a, a \in \mathbb{R}$$

$$x = -3a$$



$$w = (-3a, a, 0) = a(-3, 1, 0)$$

$$a = -1: w = (3, -1, 0)$$

13) Угредити вектор нормалан на векторе $u = (1, 2, 3, 4)$ и $v = (1, -1, 2, 4)$ у $\mathbb{R}^4$.

$$w = (x, y, z, t)$$

$$w \cdot u = 0$$

$$w \cdot v = 0$$

$$(x, y, z, t) \cdot (1, 2, 3, 4) = 0$$

$$(x, y, z, t) \cdot (1, -1, 2, 4) = 0$$

$$x + 2y + 3z + 4t = 0 \quad / \cdot (-1)$$

$$x - y + 2z + 4t = 0$$

$$x + 2y + 3z + 4t = 0$$

$$-3y - z = 0$$

$$y = a, a \in \mathbb{R}$$

$$z = -3a$$

$$x = -2y - 3z - 4t = -2a + 9a - 4t$$

$$t = b, b \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x = 7a - 4b$$

$$w = (7a - 4b, a, -3a, b), a, b \in \mathbb{R}$$

14) Угредити $\angle(u, v)$ оно је $u = (2, 6, -2, 6)$ и $v = (-2, 4, 2, 4)$

$$\cos \angle(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

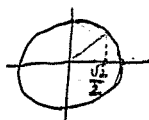
$$u \cdot v = (2, 6, -2, 6) \cdot (-2, 4, 2, 4) = -4 + 24 - 4 + 24 = 40$$

$$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{2^2 + 6^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36 + 4 + 36} = \sqrt{80}$$

$$\|v\| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 4 + 16} = \sqrt{40}$$

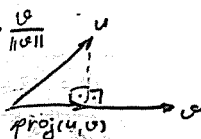
$$\cos \angle(u, v) = \frac{40}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{40}} = \frac{\sqrt{40}}{\sqrt{80}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \angle(u, v) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$



15) ПРОЈЕКЦИЈА ВЕКТОРА u НА v

$$\begin{aligned} \text{proj}(u, v) &= \cos \angle(u, v) \cdot \|u\| \cdot \frac{v}{\|v\|} \\ &= \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \cdot \|u\| \cdot \frac{v}{\|v\|} \\ &= \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} \cdot v \end{aligned}$$



$$u \cdot v = 40$$

$$\|v\|^2 = 40$$

$$\text{proj}(u, v) = \frac{40}{40} \cdot v = v$$

$$u = (7, -4, -1, 2)$$

$$v = (10, -10, -4, -2)$$

$$u \cdot v = 70 + 40 + 4 - 2 = 110$$

$$\|u\|^2 = 100 + 100 + 16 + 4 = 220$$

$$\text{proj}(u, v) = \frac{110}{220} \cdot v = \frac{1}{2} v$$

3. МАТРИЦЕ

3.1.

МАТРИЦА над полем K је правоугаони низ скалара a_{ij} облика

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} m \text{ вратио} \\ n \text{ колона} \end{array}$$

$$A: \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow K$$

$$A(i, j) = a_{ij}$$

Две матрице су једнаке када...

САБИРАЊЕ:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} \quad (\text{истог формата})$$

$$A+B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

МНОЖЕЊЕ СКАЛАРИМА:

$$\lambda \cdot A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$-A := -1 \cdot A$$

$$A-B := A+(-B)$$

$M_{m,n}(K)$ је векторски простор над полем K

$$*) A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2A-3B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 10 & -12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 & 6 \\ -21 & 3 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 & 0 \\ 29 & 7 & -36 \end{bmatrix}$$

*) Наћи x, y, z, t

$$3 \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 & x+y+6 \\ z+t-1 & 2t+3 \end{bmatrix}$$

$$3x = x+4 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$3y = x+y+6 \Rightarrow 2y=8 \Rightarrow \boxed{y=4}$$

$$3z = z+t-1 \Rightarrow 2z=t-1$$

$$3t = 2t+3 \Rightarrow \boxed{t=3}$$

ТРАНСПОЗИРАНА МАТРИЦА

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} m \text{ вратио} \\ n \text{ колона} \end{array}$$

(m \times n) \qquad (n \times m)

$$A = [a_{ij}] \quad m \times n$$

$$A^T = [b_{ij}] \quad n \times m \quad b_{ij} = a_{ji}$$

ОСОБИНЕ: $(A+B)^T = A^T + B^T$

$$(A^T)^T = A$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$(\alpha A)^T = \alpha \cdot A^T, \alpha \in K$$

$$*) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(2A-3B)^T = \begin{bmatrix} -10 & -2 & 13 \\ 3 & 12 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -10 & 3 \\ -2 & 12 \\ 13 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}_{(1 \times n)} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{(n \times 1)} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{k=1}^n a_k b_k$$

скалар

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix}_{(m \times p)} \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix}_{(p \times n)} = \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \square & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}_{(m \times n)}$$

↓ δ
← i

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj}$$

ОСОБИНЕ:

$$(A \cdot B)C = A(B \cdot C) \quad \text{асоцијативност}$$

$$A(B+C) = AB+AC$$

$$(B+C)A = BA+CA$$

+

① Израчунајте $A \cdot B$ и $(A \cdot B) \cdot C$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A^T \quad B^T, \quad A^T B^T \\ B \quad A$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-6) & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 + (-4) \cdot (-6) & 3 \cdot 0 + (-4) \cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 14 \\ 39 & -28 \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = \begin{bmatrix} -7 & 14 \\ 39 & -28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \cdot 1 + 14 \cdot 2 & (-7) \cdot (-3) + 14 \cdot 6 & -7 \cdot 4 + 14 \cdot (-5) \\ 39 \cdot 1 + (-28) \cdot 2 & 39 \cdot (-3) + (-28) \cdot 6 & 39 \cdot 4 + (-28) \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 105 & -98 \\ -17 & -285 & 296 \end{bmatrix}$$

(2x2) (2x3) 39-56 21+28 -28-70 2x3

$$(ДОМАЋИ) \quad B \cdot C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -15 & 20 \\ 8 & 60 & -59 \end{bmatrix}$$

2x2 2x3

$$A(B \cdot C)$$

② Показати да множење матрица није комутативно. $BC \neq CB$

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -15 & 20 \\ 8 & 60 & -59 \end{bmatrix}$$

(2x3) (2x3) (2x3)

$$A \quad (3 \times 2) \quad B \quad (2 \times 3)$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 14 \\ 39 & -28 \end{bmatrix}$$

(3x2) (2x3) 3x3

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -15 \\ 8 & 60 \end{bmatrix}$$

(2x3) (3x2) 2x2

↑
Имају исту димензију
↑
иако је множење дефинисано у оба случаја

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_{12} \quad E_{22} \quad E_{12} \neq$

$$E_{ij} \cdot E_{jk} = E_{ik}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$E_{22} \quad E_{12} \quad 0$

③ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -6 & 7 \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & -40 \end{bmatrix}$
 $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \quad A^T B^T = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & -40 \end{bmatrix}$

④ Показати да је AA^T и $A^T A$ симетричне за сваку матрицу A .

$$\begin{matrix} A & A^T & AA^T & A^T A \\ m \times n & n \times m & m \times m & n \times n \end{matrix}$$

КВАДРАТНЕ МАТРИЦЕ

- имаме исти број редова и колона $\rightarrow$ редовне или
 - оде чине алгебру матрица M_n - она је затворена за операције собирања, скаларног множења матрица и матричног множења.
 - квадратне матрице истог реда комутирају до конјугирају. $(AB=BA)$, т.е. не комутирају у општем случају.
- ④ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & -5 & 9 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ $\text{tr} A = 1-5+7=3$ сума елемената са дијагонала

$$\text{tr}(A+B) = \text{tr} A + \text{tr} B$$

$$\text{tr}(kA) = k \cdot \text{tr} A$$

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

ДИЈАГОНАЛНЕ МАТРИЦЕ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Најважнија од њих је јединична $E = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$

$$AE = EA = A \text{ неутрал за множење}$$

СТЕПЕН МАТРИЦЕ

$$A^2 = A \cdot A$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A \cdot A \quad A^0 = E$$

$$A^n = A^{n-1} \cdot A$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x] \quad A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$f(A) = a_0 E + a_1 A + \dots + a_n A^n \quad \text{Ако је } f(A) = 0 \Rightarrow A \text{ је корен полинома } f(x)$$

④ Наћи за које k , $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ поклапања полином $f(x) = x^2 - 25$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 10+2k \\ 0 & k^2 \end{bmatrix}$$

$$f(A) = A^2 - 25E = \begin{bmatrix} 25 & 10+2k \\ 0 & k^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10+2k \\ 0 & k^2-25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$10+2k=0 \Rightarrow 2k=-10 \Rightarrow \boxed{k=-5}$$

$$k^2-25=0 \quad k$$

(НЕ РАДИ)

⑤ Нека је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Наћи A^n .

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n=1: A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \cdot 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n=k: A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$n=k+1: A^{k+1} = A^k \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2+2k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

По принципу математичке индукције, $(\forall n \in \mathbb{N}) A^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ИНВЕРЗИБИЛНЕ (НЕСИНГУЛАРНЕ) МАТРИЦЕ

Квадратна матрица A је инверзibilна ако $\exists B$ т.г. је $AB=BA=E$.
 $B=A^{-1}$ је инверз матрица (она је јединствена).

⑥ Нека је $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Одредити кога је A инверзibilна и наћи јој инверз.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ax+bz=1 & / \cdot (-c) \\ cx+dz=0 & / \cdot a \end{bmatrix}$$

$$(ad-bc)z = -c$$

$$\begin{bmatrix} ay+bt=0 & / \cdot (-c) \\ cy+dt=1 & / \cdot a \end{bmatrix}$$

$$(ad-bc)t = a$$

$$z = \frac{-c}{ad-bc}$$

$$x = -\frac{d}{c}z = -\frac{d}{c} \frac{-c}{ad-bc} = \frac{d}{ad-bc}$$

$$= \frac{d}{ad-bc}$$

$$t = \frac{a}{ad-bc}$$

$$y = -\frac{b}{a}t = -\frac{b}{a} \frac{a}{ad-bc} = \frac{-b}{ad-bc}$$

$$ad-bc$$

Ако је $\det A \neq 0$, инверз A^{-1} постоји.